二十世纪西方哲学译丛

证明与反驳

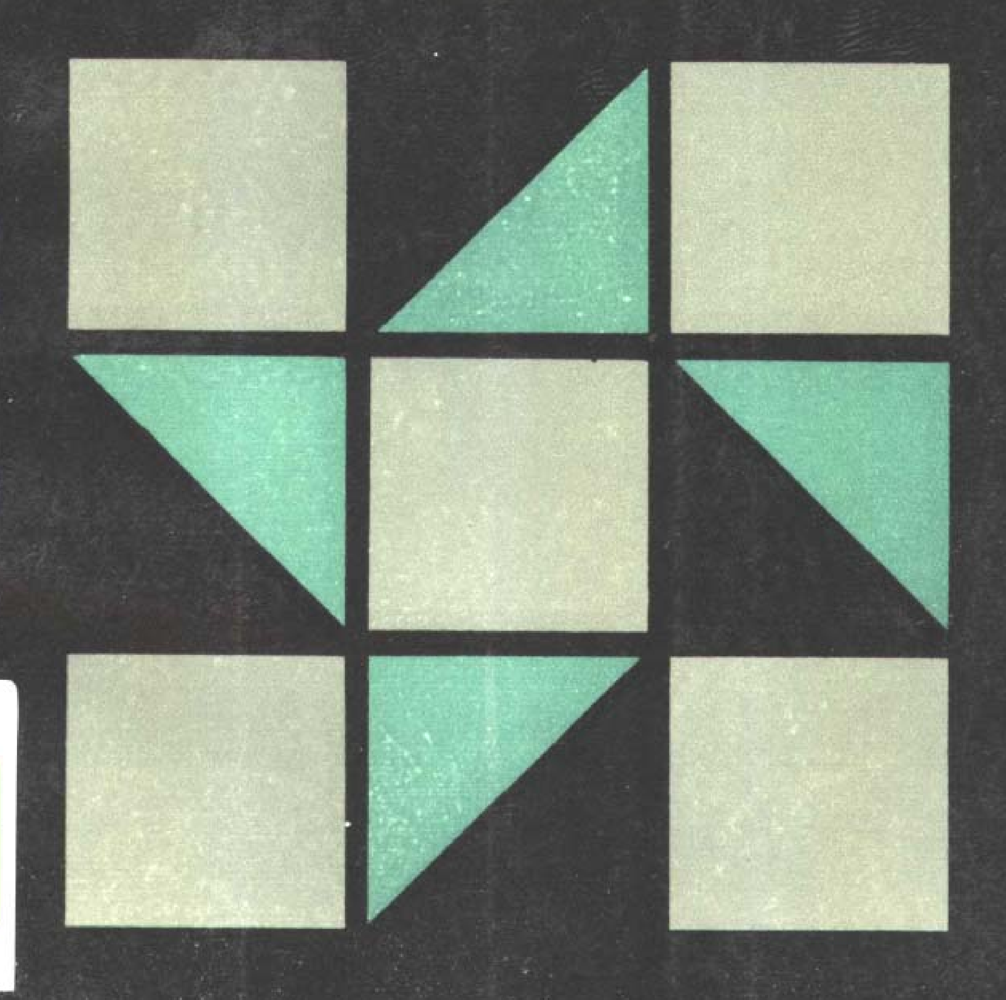
——数学发现的逻辑

Proofs and Refutations

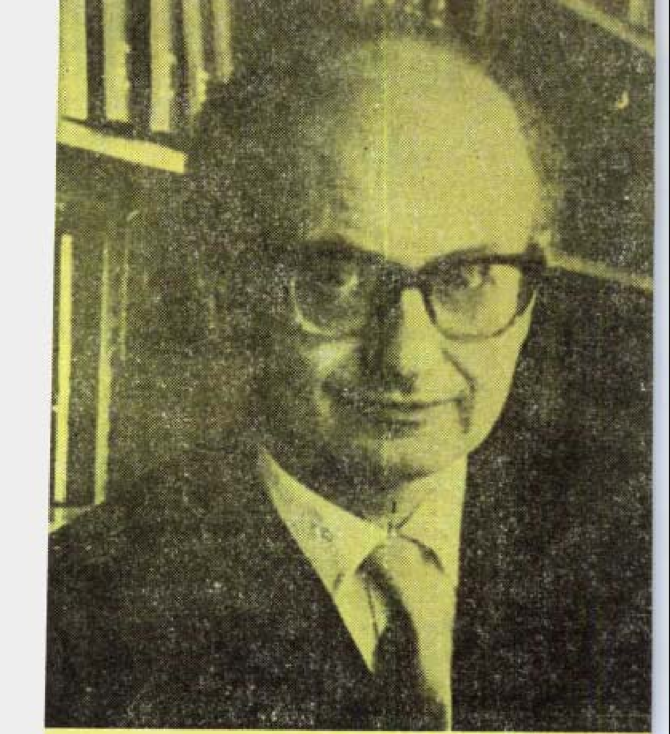
[英]伊姆雷·拉卡托斯 著

康宏逵 译

上海译文出版社



二十世纪西方哲学译丛



证明与反驳

——数学发现的逻辑

Proofs and Refutations

[英]伊姆雷·拉卡托斯 著

康宏逵 译

上海译文出版社

Imre Lakatos

Edited by John Worrall and Elie Zahar

PROOFS AND REFUTATIONS:

The Logic of Mathematical Discovery

Cambridge University Press Cambridge 1976

根据剑桥大学出版社1976年英文版译出

证 明 与 反 驳

——数学发现的逻辑

〔英〕伊姆雷·拉卡托斯 著

〔英〕约翰·沃勒尔、伊利·扎哈尔 编

康宏逵 译

上海译文出版社出版、发行

上海延安中路955弄14号

全国新华书店经销

上海市印十二厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 7.25 插页 3 字数 157,000

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷

印数：1—67,000册

书号：2188·44 定价：1.90元

译者的话

（向读完作者的话的读者说的话）

我初译此书是在廿年前。廿年来，始终未敢轻信“逻辑”概念能从外部强行绷开。

可是，“我不在乎包装”，很有点自悖其理地喜欢着拉卡托斯的这本书。他那只上写“数学发现逻辑”的包装袋里实实在在有东西，是他花了五个年头调查两个数学案例得来的几种批评模式、几条助探规则。五年攻下两例，空包装袋公司决不容这样的低效率的。敬之者就不会恭维他才华横溢。溢出的是心血。还是这位拉卡托斯，后来恃才标新，不再耐心调查公理化集合论这个案例，其“准经验数学观”不也乏得可以么？

这本书的大功劳，据译者看，是向无冲突的数学史观杀了一刀。较之科学，数学内部的冲突更难被正视，自然是数学太神圣了的缘故。错的便不配享有“数学”之名，最多只能算安徒生的丑小鸭，呆在数学的史前期里任成鸭们调侃。作者叫你睁大眼睛。你看见了，今日的大一统源于昨日的大混战。这里有猜想保卫派与反驳派之战，有内容保存派与增加派之战，有概念收缩派与绷开派之战，有归纳派与演绎派之战，犬牙交错，好不热闹。加上作者巧于理性再造，持久战浓缩成几幕速决战，更显得扣人心弦。于是，对数学发展是一往无前的和平建设这种传统观念，你非打个问号不可了。

冲突可以促进数学生长，总有点费解。作者给你细讲了几条理解线索中的一条：证明与反驳互为触发剂，协同作用于数学知识的革新。尽管他爱用“虚假性反传导原理”这样大而无当的字眼儿，其实并没有什么高深的道理。但经他点破，在助探论上倒也颇有些分量。他的引理并入法、多证多驳法是好模式，不过怪物校正法、怪物除外法、例外除外法也不可笼统地归入违禁品。他告诉我们，助探观点不同于逻辑观点，要求数学家审时度势，怎么干有利于知识生长就怎么干。这是真知灼见。数学(和科学)的目标毕竟不是但求不错。若是，数学家尽可一味说重言句，或者更干脆，不张口。

新概念(新方法)的形成是数学史上的里程碑。在这方面，作者很讲了几件新鲜事情，如概念绷开式的反驳、证明生成的理论概念、分类和语言动力学、朴素反例与理论反例的对立。我一面叹服他的眼力，一面又大起疑心，不敢把概念形成全嫁给证明和由反例诱发的证明分析。看来，他举的“与球面同胚”和“单连通性”这两个例子正好能校正成跟他的概念生成模式作对的反例。按历史原貌，欧拉猜想的哥西证明不过是朴素证明。哥西毫不觉察他作了拓扑变换、欧拉示性数是拓扑性质，同代人也都相差无几。当时猜想和证明遭到了画框、环形面的反驳，但朴素的证明分析没有得出表述新引理所需要的上述两大概念，人们反而求助于“坑道”、“内隐多边形”这等朴素的术语，作了例外收容式的蹩脚处理(见本书第108页注①)。拉卡托斯显然说不清这两大概念的诞生过程，只得指派一个至少不比梅比乌斯、李斯丁、黎曼拓扑意识少的教师来作拉卡托斯想象的理论证明分析。这位教师的“发现”，与抄袭无异。总之，说到概念形成，我总感到尚有数不清的未解之谜。经验主义解释很荒唐，准经验主义解释同样无法令人满意。虽然一强调例子，一

强调反例，基本精神都是只从理论的非理论的"底部"来看理论，从不离这个雷池。

拉卡托斯精采的历史考证不尽可信。附录一中的故事，在非标准分析创始者阿·罗宾逊指出哥西用无穷小方法之后，他立刻出了故事新编（见《哥西与连续统》）。我看不了法文书，不知他的哪一个版本算"1984式地改写"。历史研究有很实在的困难，光挖苦庞卡勒、贝尔也无济于事。反摩登化的也难免搞摩登化，怎么回事呢？

数学家坡亚振兴助探论，意在数学。哲学家拉卡托斯将助探论的刀尖由推测移向证明和反驳，颇近项庄舞剑了。他想逼数学转入波普尔替科学设计的轨道，叫作"批判的或有一失主义"。在他口里，"或有一失"是"必有一失"的同义词。所以，在我眼里，他的数理哲学终究要算一种病例。这种病不易定名。叫"怀疑主义"吧，他说不害他这种病还不可能对怀疑主义有免疫力哩。叫"无政府主义"吧，他又跟法伊尔阿本德划清了界线。无以名之，只得暂用一极长的摹状词：因穷于应付假想反例过度兴奋、过度疲劳所致之乐观主义绝望症。他患病不可只归咎于波普尔。另有一层病因，是他自己恨不得把批判性化为辩证法的唯一守护神。这就得讲到他的身世。

这个生于1922年的匈牙利人，1956年跑到英国去了。其间有一段政治经历：反对法西斯，参加共产党，在教育部当高级干部，被捕，获释。四十年代后期，他写过宣传马克思主义、批判物理学唯心主义的文章。他讳谈往事，大约始于即将取得剑桥博士学位的前夕。后来他的自述说他近四十岁进入波普尔的磁场、放弃了"黑格尔主义"，这话全然不合事实。就在他当博士的前一年，他还在引波普尔为唯物主义的同志，还在反问为什么他该放弃"从马克思主义学来的心爱的观念"，指的是相对

真理学说。那时他正竭力把波普尔的批判主义引向极端，不但搬进了数学，而且劝波普尔跟他一起改宗自悖其理的“无奇不有主义”(译者命名)，即“一切有穷长的全称陈述在宇宙间总有反例”。同时，据他的看法，非如此不能与“真正马克思主义的精神”相符（见1960年的发言稿《论必然性，尼尔和波普尔》)。够离奇的，但离奇恰恰能解释他在数理哲学上的那套批判化的辩证研究纲领。让高踞于形式主义天堂的数学下凡，满足不了他的批判欲。他立誓将数学直拖进永无休止的大批判的地狱。在他看来，一定得由他核正了数学理性无力核正自身，才反而能建立“认识论上的乐观主义”。至于如此奇谲的概念拓扑变换，数学家们是瞠目结舌还是五体投地，他从不挂心。批判家是只图快意的。

拉卡托斯分两步实行他的纲领。第一步谈非形式数学，论“证明不证明”，见本书；第二步谈形式数学，论“基础无基础”，见论文《无穷回溯与数学基础》、《经验主义在近期数理哲学中的复兴》。

从改进、解释、刺激人提新问题的角度来看不证明的证明，确实很有趣。哥伦布误抵美洲，不该被烙上金印。可是，发现了他的印度——也许位置、版图、风俗人情跟他预想的不大一样——的数学家，为什么就该让拉卡托斯烙上金印呢？任何时候，数学家决不会在他的证明后头写上“诸证未毕、仅供批判”八个字的。不写未必即是教条主义者，或许只是怀有一种健全的信念：我虽无能，数学究竟不是宗教，一直有良好的自我矫正能力，因此，不证明的证明可以经有穷多次改进（包括理论框架的革命)之后变成在证明的证明，尽管它不是终极证明，毕竟已是后者的某种完全严格的实现，就是说，只要概念不变，证明中的数学引理和逻辑原则不可能假。我相信，数学很早就

有本事将一批批不证明的证明在这种意义上转化为在证明的证明，而且这些证明的产品越来越不平淡。当拉卡托斯批评欧拉-庞卡勒定理的代数拓扑证明时，其实已经技穷了。他连一个逻辑反例都想不出来，只好说某公理是约定、某定义有怪物除外背景或整个代数拓扑太抽象。言之有理，可惜算不上批评。"反璞归真"有背数学生长的规律。

拉卡托斯的证明论里暗藏着全称命题与存在命题、真与假、证明与反驳的不对称性。全称猜想的反驳相当于其反例的存在性证明。摆出的反例经常不是硬梆梆的，关于它是个反例的证明也往往被分解成一组既不完备又不确实的引理。"想入非非"的反例，如单侧多面体，如无导数连续函数，如皮阿诺曲线，如哥德尔不可判定句，更需要异常"矫揉造作"的理论构思，否则断然绷不开弹性很小的概念。况且还有不举反例的纯存在性证明，直觉主义者持异议，其他数学家也多少存戒心。这些都是拉卡托斯谈他的反驳所会碰到的困难，他却佯作不知，偏要以"反驳在反驳"强撑"证明不证明"。

拉卡托斯的基础论立足于他的大大萎缩了的证明论。他利用形式化的恰当性无精确准则这个事实，断言形式理论有潜在否证物，在非形式理论中，非形式理论有潜在否证物，在其自身的底部中。而如果理论是一致的，不存在逻辑否证物的话，他便说仍可以有匹克威克意义上的助探否证物，即我辈俗人所谓非否证物。他宣布，反驳的决定性作用本来不在于反驳，在于把问题转移到更重要的问题上去。至此，他仿佛放弃了原证明论的基地，又安全转移了，但也只是"仿佛"而已。擅长运动战的哲学，横竖是不好对付的。

好在拉卡托斯的错话不是蠢话。谁又能不说错话呢？但我愿奉劝数学界诸公，也不必因蠢话听得多了便怠慢了数

理哲学。“高斯无论如何有罪”，贝尔特拉米“愚蠢到无与伦比”，赫尔姆霍兹象“俄国村妇想扮法国话说得极好的贵夫人来出风头”……这些话乃是学识渊博的车尔尼雪夫斯基给非欧几何下的评语。他承认“我不懂也不想懂数学”，谦虚而诚实。他是自觉“我必须谈”我不懂的东西才说蠢话的。宽恕哲学家吧，数学中哲学问题的难度确非局外人所能想象。记得我初学数理逻辑的时候，曾经问我的老师王宪钧：当代数理哲学家里哪些人是数学家？他的回答真干脆：没有一个不是！如果不放宽尺度去收容例外，比方说某些数学史家，我想，这话是对的。

拉卡托斯是数学史家，所以他这本病态的书才不使数学家个个生厌吧。修改一部稚气十足、错漏百出的旧译稿则不胜其烦。终于改完，要感谢上海译文出版社的热心和耐性。有若干疑问，分别由齐民友、康宏锦和沃勒尔教授帮忙解答了。非洋人不援洋例，仅仅出于我们中国人的感恩之心，我也必须把这本书献给我的夫人徐增缓。

康宏逵

1985年11月20日

校后补记(1987年3月)

这部译稿自然也是大“可反驳的”，编者同志可以作证。他们帮我发现(不是“消灭”)了若干错误，我谢谢他们。我还没有脱离“试试错错”的阶段，以为不宜过早脱离。

编 者 的 序

1974年2月2日，我们伟大的师友伊姆雷·拉卡托斯出人意料地去世了。当时，他还照常在为许多学术规划操劳着。就中最重要的一项，是出版《不列颠科学哲学杂志》1963—1964年分四期刊载的他的光辉短论《证明与反驳》的增改本。拉卡托斯久已签了这本书的合同，却推迟出版，盼望能把短论作些更正和进一步的改进，再添些扎实的材料。由于他的兴趣转向物理科学的哲学，这件工作大大耽搁了。拖到1973年夏天，他才终于下决心动手出版。那年夏天，我们分头同他商量过出书计划。尽管境况起了可悲的变化，我们还是设法编成了一本尽量接近拉卡托斯预想的书。

原短论《证明与反驳》成了本书第一章。除此之外，我们收进了三个新项目。首先是在正文中添了第二章，讲的是庞卡勒给笛卡儿-欧拉猜想作的向量代数证明，底稿系拉卡托斯1961年剑桥博士论文第二章。(原短论《证明与反驳》系博士论文第一章经大量更正和改进的稿本。)博士论文第三章在这里变成了附录一，内有多证多驳法的又一案例研究，讲的是哥西给"任何连续函数收敛级数的极限本身也连续"这个定理作的证明，念过《证明与反驳》的数学家常常表露一种怀疑：拉卡托斯所描述的证明分析法也许适用于多面体研究，那是个"靠近经验"的科目，反例不难想见，但对"真正的"数学来说也许就不适用了。有了正文第二章和附录一，这种怀疑想必会减少。第三个增添的项目

是附录二，底稿也是博士论文第三章的一部分，谈到了他的主张在数学的发展、叙述、教学方面的后果。

拉卡托斯延迟出版的理由之一是，这批追加材料虽然对他的主张有不少新的充实和发挥，但他承认有一些还需要进一步斟酌、进一步作历史考证。论及哥西和富里叶的材料（见于附录一)尤其如此。我们也明知这批材料有若干地方难懂和含糊，明知有所省略。然而，我们觉得不该改变拉卡托斯手稿的内容。至于要对这批材料加工补遗，我们两个又都没条件补上必不可少的又长又详的历史考证。事情明摆着：要么根本不发表这批材料，要么以未定稿的形式发表。我们决心选择后一方案。我们觉得这样做好处很多，也希望这会刺激别的学者在必要时去扩充和改正。

总之，我们认为无权变动拉卡托斯材料的内容，即使是我们深信他的主张变了的那些部分。所以，我们只限于在编者按语里指出，假使现在由拉卡托斯自己发表这批材料，我们要设法劝他改哪几处，以及(这常常是一回事)我们相信他会改哪几处。(不言而喻，从写完博士论文到去世的十三年间，他的学术立场变得很可观。他的[1970]里解释过他在总的哲学见解上有哪些大变化。应当提一提，拉卡托斯认为，他的科学研究纲领方法论对他的数理哲学有重要的义蕴。)

我们处理行文问题的办法是，保留拉卡托斯本人发表过的材料(即正文第一章)，几乎完全不变（仅有的例外是少数误印之处和明显的小错)。然而，以往未发表过的材料，变动还是相当大的——不过，再说一遍，只限于形式，不涉及内容。既然这种做法似乎颇不寻常，恐怕还是辩解几句为妥。

拉卡托斯始终十分留心他要发表的一切材料的行文，发表之前总要在同事和朋友中间广为散发，供人批评和提出改进的

建议。我们确信，这里首次发表的材料，他也会这么办，而且他所作的改变比我们敢作的还要厉害。我们由亲身体验深知拉卡托斯为尽量清晰地表达他的主张花费的苦心，这就使我们有义务尽力设法改进这批材料的行文。毫无疑问，要是拉卡托斯本人修改过底稿，这些新项目就不尽是眼前这个样子。不过，我们自觉跟拉卡托斯够亲密的了，在他以往某些出版事务中涉入得也够深的了，可以作一次持之有据的尝试，把材料润色到接近他自己的高标准的地步。

有机会把拉卡托斯数学哲学方面的某些重要著作编成这个版本，我们很高兴，因为，借此也可稍稍报答他在学术上和私交上给我们两人的恩惠。

约翰·沃勒尔

伊利·扎哈尔

作 者 引 言

当一种强大的新方法脱颖而出之后，研究新方法能胜任的那些问题的部门进展疾速，风头出足，其余的问题越来越受冷落，甚至被遗忘，再研究就会遭到蔑视，这种情况在思想史上是屡见不鲜的。

在本世纪，由于元数学生机盎然的发展，数理哲学中似乎已经出现了这种局面。

元数学的对象是从数学得来的一种抽象，经过这种抽象，数学理论被形式系统代替，证明被特定的合式公式序列代替，定义被“理论上多余”但“排印上方便”的“缩写手法”代替。① 这种抽象出自希尔伯特的设计，为的是备置一套强大的技术，好去探讨数学方法论的某些问题。同时也有元数学抽象视野以外的问题。与非形式(inhaltliche) 数学及其生长有关的全部问题，与解数学题的势态逻辑有关的全部问题，都要归入这一类。

数理哲学中有一派动不动就说数学和它的形式公理化抽象(以及数理哲学和元数学)是一回事，按我的用语，这叫“形式主义”学派。要找形式主义立场最直率的自白，卡尔纳普[1937]里便有一例。卡尔纳普强行要求：(a)“哲学应当被科学的逻辑所取代……”，(b)“科学的逻辑不是别的，只是科学语言的逻辑

① 丘奇[1956]，1，第76—77页。也参见皮阿诺[1894]，第49页；罗素和怀特海[1910—1913]，1，第12页。帕斯卡[1659]中制订的那个欧几里得纲领要臻于完备，这是不可少的一步；参见拉卡托斯[1962]，第158页。

语法……”，(c)“元数学就是数学语言的语法”(第xiii页和第9页)。一句话，数理哲学应当被元数学所取代。

形式主义割断了数学史与数理哲学的联系，因为，按照形式主义的数学概念，数学原没有历史。据罗素的措辞“浪漫”而立意庄重的评语，“自古以来头一部论述数学的书”是布尔的《思维规律》(1854年)，① 这话任何形式主义者大体上都会同意的。形式主义否认了大多数过去公认的数学有资格叫数学，于数学的生长也就不能置一辞。形式主义的天堂里面，住着天使般的数学理论，凡间不确实性的种种污迹洗刷得一干二净。“创造”期的数学理论固然一概不准入内，“批判”期的也很难有哪一个容许破例。话虽如此，形式主义者照例给堕落的仙子留一扇小小的后门：有些“数学与非数学的混合物”可望获准，如果居然能找到形式系统“在一定意义上容纳了它们”(柯里[1951]，第56—57页)。谨守这类条规，牛顿不得不等上它四个一百年，一直要到皮阿诺、罗素和蒯因把微积分形式化了，这才帮他挤进了天国。狄拉克比较走运。他尚在人世，J.施瓦茨便拯救了他的灵魂。这里或许也该提一提元数学家自悖其理的窘境：拿形式主义乃至只拿演绎主义的标准来量，他也算不上诚实的数学家。因为，据狄厄多内的高谈阔论，以公理化格式叙述自己的推理乃是“任何有志于老实治学的数学家肩负的绝对义务”。([1939]，第225页。着重号是我加的。)

屈居当今形式主义治下，人们不由得想套用康德的名句：缺少哲学的指导，数学史变成了盲目的历史；不理睬数学史上

① 罗素[1901]。这篇短论也曾作为罗素[1918]第5章重新发表，题为“数学与形而上学家”。引文可见于企鹅公司1953年版第74页。在[1918]前言里，罗素说起过那篇短论的“语调多少要用编者恳求我把文章写得‘尽量浪漫一点’才好解释”。

最引人入胜的现象，数理哲学变成了空洞的哲学。

"形式主义"是逻辑实证主义哲学的防护堤。据逻辑实证主义说，只有"重言的"或经验的陈述才有意义。非形式数学既非"重言的"又非经验的，它必定无意义，纯系无稽之谈。① 逻辑实证主义的教条对数学史和数理哲学都是有弊而无利。

本短论的目的是探讨数学方法论的某些问题。我用的"方法论"一词的涵义，近乎坡亚和伯奈斯的"助探论"(heuristic)②，也近乎波普尔的"发现逻辑"或"势态逻辑"③。时下强征"数学方法论"出任"元数学"同义词的敕令，无疑有形式主义气息。这足以证明作为发现逻辑的方法论在形式主义数理哲学中无存身之地④。据形式主义者说，数学与形式化数学是一回事。可是，在形式化理论里，你能发现什么呢？两样东西。第一，一

① 据图开特说，哥德尔句无意义（[1950]，第129页）。图开特是在驳斥考丕。考丕声称，哥德尔句既是先验真理而又不是分析的，它们就驳倒了先验真理的分析论（[1949]和[1950]）。他们双方都没有注意，从这个观点看，哥德尔句独特的禀性正在于这类定理是非形式数学的定理，因而他们其实是在就某一特例讨论非形式数学的禀性。

② 坡亚[1945]，尤其是第102页，也见[1954]，[1962a]；伯奈斯[1947]，尤其是第187页。

③ 波普尔[1934]，然后见于[1945]，尤其是第90页(或第4版[1962]，第97页)；也见[1957]，第147页以下。

④ 例如，可以举塔尔斯基[1930a]和[1930b]为证。前一篇文章里，塔尔斯基公开用"演绎科学"作"形式化演绎科学"的略语。他说："形式化演绎学科形成元数学的研究领域，大致相当于空间形体形成几何学的研究领域。"后一篇文章里，却给这种合常识的提法来了个离奇的扩张主义歪曲："演绎学科构成演绎科学方法论的对象，差不多相当于空间形体构成几何学的对象，动物构成动物学的对象。自然，并不是所有演绎学科都纳入了适合作科学研究对象的形态。例如，凡是缺乏确定的逻辑基础、没有准确的推论规则、用照例有歧义的不精确的会话语汇来表述其定理的，一句话，凡是未形式化的，就不适合。因此，元数学研究只限于讨论形式化演绎学科。"革新之举在于：前一提法只说，元数学的对象是形式化演绎学科；后一提法则是说，全因为非形式化演绎学科根本不适合作科学研究对象，才使得元数学的对象只限于形式化演绎学科。言外之意，形式化学科的史前期不能作科

台程序设计得当的图灵机花有限时间能解的问题(如：被当成证明的某物是不是证明?)，你能发现它们的解。可惜没有数学家有雅兴把这类判定程序定死了的干巴巴的机械"方法"搞到底。第二，还有些问题（如：在不可判定的理论中某公式是不是定理?)，你也能发现它们的解，可你就只好以"无法驾驭的顿悟和好运气"这种"方法"为向导了。

可是，活的数学还不至于这般凄惨，不倒向机器的理性主义，就得倒向瞎矇的反理性主义。⑥ 向非形式数学作一番调查，会得出一套丰富多采的供务实数学家用的势态逻辑，既非机械的又非反理性的势态逻辑，不过，这不会被形式主义哲学承认，想受它激励就更别说了。

不批判形式主义，不摒弃形式主义，不可能发展数学史和

学研究对象，可不象动物种的史前期似的可以成为科学得很的进化论的对象。谁也不怀疑，关于数学理论的某些问题只有把它形式化了才能探讨，一如关于人的某些问题(比方说人体解剖学问题）只有等人死了才能探讨。可是，很少有人会由此推论，人只有"纳入了'死的'形态"之后才"适合作科学研究对象"，因此生物学研究只限于讨论死人。诚然，如果在早期解剖学的光荣年代里有位维萨留斯的狂热门徒，眼看强大的新式外科术脱颖而出了，还要说生物学和尸体肢解是一码事，我也不致大惊失色。

除了形式系统以外，还可能不可能有某种别的方法论，塔尔斯基是持否定态度的。在[1941]前言里，他详细讲过他的态度："一部经验科学方法论的教程……大抵只得以估价和批评一些不经久的揣测和不成功的尝试为限"。理由就在于经验科学不科学。因为，按塔尔斯基的定义，科学的理论应当是"被断定了的陈述根据一定的规则排列而成的系统"。

⑥ 形式主义哲学最危险的放浪习气之一就是：(1) 先针对形式系统说点什么，说得挺对；(2) 然后说这话适用于"数学"，如果我们承认数学跟形式系统是一回事，也还算说得对；(3) 再往下就来一个偷换词义，按普通涵义来用"数学"这个字眼儿。正是这个缘故，蒯因才说([1951]，第87页)："数学家是靠无法驾驭的顿悟和好运气矇中他的证明，但事后别的数学家可以核查他的证明"；"这反映着数学中典型的情景"。不过，核查普通的(非形式的)证明常常是一件很棘手的没准数的事情：矇中"过错"也很得有点顿悟和幸运，并不亚于矇中证明：发现非形式证明里的"过错"有时也许要花几十年，如果不是几百年的话。

数学发现逻辑，即数学思想的系统发生学和个体发生学。①

但是，形式主义数理哲学根子很深。它是教条主义数理哲学这条长链子上最新的一环。教条主义者与怀疑主义者之间的辩论已有两千年以上。教条主义者认为，靠我们人的理智和(或)感官，我们能得到真理，也能知道自己已经得到真理。怀疑主义者相反，要么认为我们不能得到真理（除非借助于神秘的体验），要么认为我们不能知道自己能否得到真理或自己已经得到真理。在这场论据一再翻新的大论战里，数学一直是教条主义者引为骄傲的堡垒。每当一代数学教条主义陷入"危机"，自有新的翻版再度来供应真正严格的、真正终极的基础，于是数学又恢复了权威在手、万无一失、不可反驳的形象，又俨然是"一向讨上帝欢心，使他愿意赐福人类的唯一科学"了(霍布斯[1651]，第15页)。大多数怀疑主义者听任教条主义认识论手里的这座要塞坚不可摧。② 挑战现在才姗姗来迟。

这个案例研究的核心是向数学形式主义挑战，还不是直接向数学教条主义这个根本立场挑战。它的目标不高，只想抓住一点将文章做透：非形式、准经验数学的生长，靠的不是单调增加千真万确的定理的数目，靠的是用玄想和批评、用证明和反驳的逻辑不停地改进推测。然而，既然元数学是正在疾速生长的非形式、准经验数学的一个范例，本短论也要含蓄地向现代数学教条主义挑战。当今数学史学者在他自己的领域内也

① 庞卡勒和坡亚都建议，研究智慧的发展，尤其是研究数学智慧的发展，要应用赫克尔的个体发生史重演系统发生史这条"根本的生物发生律"（庞卡勒［1908］和坡亚[1962b])。引用庞卡勒的话："动物学家坚持动物的胚胎发育大体重演了它的历代祖先纵贯若干地质时代的全部历史。看来智慧的发展也一样……由于这个缘故，科学史理应成为我们的第一向导"(霍尔斯特德权威译本，第437页)。

② 数学在教条主义者与怀疑主义者的争论中起的作用，我的[1962]里有所讨论，可参见。

会辨认出这里描述的模式。

用对话体想必才能使这个故事的辩证法传神；我讲这个故事，意在写出某种按理性再造或"蒸馏"过的历史；真实的历史则在脚注里跟它相呼应，所以大多数脚注应该看成短论的有机的组成部分。

目　　录

第 一 章

1. 一个问题，一个猜想

这场对话发生在一间假想的教室里。班上的人迷上了一个问题：多边形的顶点数V和棱数E之间有一种平淡无奇的关系，就是棱和顶点一样多或$V=E$，多面体——特别是正多面体——的顶点数V、棱数E和面数F之间有没有某种类似的关系？前面那种关系使我们能按棱数（或顶点数）给多边形分类，把它们归入三边形、四边形、五边形等等。类似的关系会有助于给多面体分类。

试了多次，又错了多次，他们才注意到，对于所有正多面体$V-E+F=2$。① 有人推测，这也许对任何多面体都适用。别的人试着否证这个猜想，使出许多不同的招数去检验，它都一一应验了。这些结果证实(corroborate)着猜想，暗示着它可能证明得了。诸位呢，就是在这个节骨眼上，在发问阶段和猜想阶段过去之后，跨进了教室。② 教师刚想拿出一个证明。

2. 一 个 证 明

教师：上一堂课，我们得到了一个有关多面体的猜想，那就是，对于所有多面体$V-E+F=2$，这里V是顶点数，E是棱数，F是面数。这个猜想，我们用形形色色的办法检验过了，但是还

没有证明。有谁找到了证明么？

学生西格马："起码我得承认，我还没能设计出这个定理的严格证明……然而，在这么多的情况下确定了它真，就无法怀疑它对任何立体都应验。总之，这个命题似乎有了令人满意的实例论证。"③不过，假使您有证明的话，请您让它亮个相吧。

教师：实不相瞒，我有一个。这便是下面的思想实验。第一步：让我们想象多面体是空心的，有一层薄橡皮做的表面。如

---

① 最先被欧拉[1758a]注意到。他原来的问题是要给多面体分类，编者提要指出了这难在哪里："在平面几何里多边形 (figurae rectilineae) 很容易按边数(当然永远等于角数)来分类，在立体几何里多面体(corpora hedris planis inclusa)的分类问题要难得多，因为光看面数不足以达到目的。"

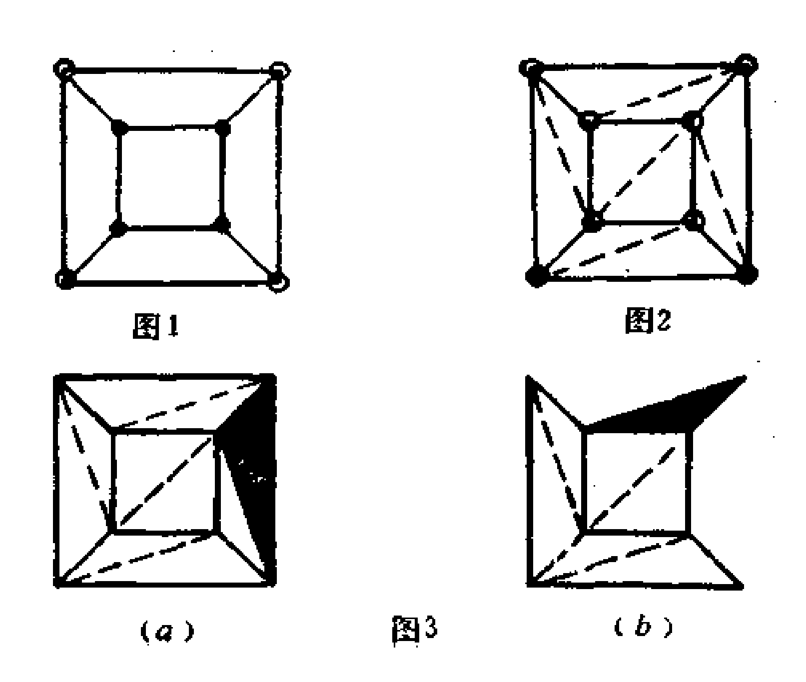
欧拉能得出结果，秘诀全在发明顶点和棱的概念。是他头一个指出，除面数之外，多面体表面上点和线的数目也决定它的(拓扑)特征。有趣的是，他一面竭力强调他的概念框架的新颖，强调他非发明"acies"(棱)这个术语来代替老的"latus"(边)不可，因为latus是个多边形概念，他想要的是个多面体概念，一面还沿用"angulus solidus"(立体角)这个术语来指他的星点状的顶点。近来一般人都承认这项结果的优先权在笛卡儿手里。此说的根据是笛卡儿的一份手稿[约1639]，系1675—1676年由莱布尼茨抄自原稿，1860年由德卡瑞尔再度发现和发表。按理说，不作点小保留，优先权不能让给笛卡儿。不错，笛卡儿说过平面角数等于$2\phi+2\alpha-4$，他的ϕ指面数，α指立体角数。不错，他也说过棱(latera)数是平面角数的二倍。这两句话一联，当然就得出欧拉公式了。笛卡儿却悟不出该这么干，因为他照旧只靠(平面与立体)角和面想问题，不曾来一次自觉革命，转变到0维顶点、1维棱和2维面的概念，而完满刻划多面体的拓扑特征正是以这些概念为既必要又充分的基础。

② 欧拉由种种推断着眼把这个猜想周周到到检验了一番。他核查过它对棱柱体、棱锥体等等是否成立。他本可以再加一条："正则物体只有五种"也是这个猜想的一个推断。另外一个推断是"四种颜色足以给地图着色"，这个命题靠不住，但至今一再得到证实。

案例$V-E+F=2$中的猜想和检验阶段，波亚的书里讨论过了([1954]，第1卷，第3章，前5节，第33—41页)。波亚到此收场，没有再讲证明阶段——诚然，他指出了需要某种解"证明题"的助探论([1945]，第144页)。我们的讨论从波亚收场的地方开场。

③ 欧拉([1758a]，第119页和第124页)。但事过不久([1758b])他就提出了一个证明。

果我们切掉一面，可以把剩下的表面放在黑板上绷平而不撕破。面和棱要变形，棱也许要变弯，但V和E不会变的，所以，当且仅当对于原多面体$V-E+F=2$，对于这个平网络$V-E+F=1$——记住，我们移走了一面。（图1画的是从立方体得出的平网络。）第二步：现在把我们的地图——看上去的确象地理上的图——作三角剖分。在还不是三角形（可能是曲线的）的多边形（可能是曲线的）里画出对角线（可能是曲线）。每画一条对角线，E和F各增加一，所以$V-E+F$总数仍不会变（图2）。第三步：现在从作过三角剖分的网络里把三角形一个一个移走。每移走一个三角形，要么移走一棱，于是丧失一面一棱（图3(a)），要么移走二棱一顶点，于是丧失一面二棱一顶点（图3(b)）。可见，如果在移走一个三角形之前$V-E+F=1$，那么移走这个三角形之后依然如故。这道工序做到最后，我们手里只有一个孤零零的三角形了。


图1　图2
(a)　图3　(b)

对它来说，$V-E+F=1$通得过。这样就证明了我们的猜想。①

学生德尔塔：现在您该叫它"定理"才对。它丝毫猜的成分都没有了。②

学生阿尔发：我纳闷。这个实验对立方体或四面体行得通，我看出来了。可是，我怎么知道对任何多面体都行得通呢？比方说吧，老师，您有没有把握，任何多面体移走一面之后都能放在黑板上绷平？您的第一步，我存疑。

学生倍塔：您有没有把握，把地图作三角剖分的过程里每添一条新棱永远得到一个新面？您的第二步，我存疑。

学生伽马：您有没有把握，把三角形一个一个扔掉的时候，不是丧失一棱，就是丧失二棱一顶点，两者必居其一？您又有没有把握，移到最后只剩下一个孤零零的三角形？您的第三步，我存疑。③

教师：不用说，我没有把握。

阿尔发：这下子我们岂不比原先还要狼狈了！现在不是只有一个猜想，反倒至少有三个啦！这种把戏，您居然叫"证明"！

教师：我承认，用传统名称"证明"指这个思想实验，按道理讲，也许是有点儿张冠李戴。我不认为它是在确定猜想的真实性。

德尔塔：那么它是在干什么呢？您认为一个数学证明是在

---

① 这个证明计谋来自哥西[1813a]。

② 十九世纪许多数学家与德尔塔所见略同，仿佛这一证明已经牢牢树立了这个"定理"，容不得半点怀疑。例如：克瑞勒[1826—1827]，2，第668—671页；马梯森[1863]，第449页；德荣奎埃[1890a]和[1890b]。引一段典型的话："有了哥西证明之后，绝对不能再怀疑，诚如欧拉1752年所说，$V+F=E+2$ 这种优雅的关系适合于一切类型的多面体。一切的犹豫本来在1811年就该消失尽净。"（德荣奎埃[1890a]，第111—112页。）

③ 这个班水平相当高。哥西也好，庞索特也好，十九世纪别的许多杰出数学家也好，都不曾想过这些问题。

证明什么呢？

教师：这是个微妙的问题，过一会儿我们要设法回答的。在此之前，我建议，用古已有之的崇高术语"证明"来指一个思想实验，或者叫"准实验"，其中提示把原猜想分解成若干子猜想或引理，因而把它嵌入了一套可能相距甚远的知识。比方说吧，我们的"证明"把原猜想嵌入橡皮薄片的理论了，而它本来谈的是晶体，也可以说是固体。原猜想之父，笛卡儿或欧拉，一定做梦也没想到能这么干。①

---

① 思想实验(deiknymi)是数学证明最古老的模式，在欧几里得以前的希腊数学里盛极一时(参见萨博[1958])。

按助探论的次序，猜想(或定理)先于证明，这对古代数学家是老生常谈，由"分析"在助探论上先于"综合"便可推知。(有一精彩的讨论，见罗宾逊[1936]。)据普罗克洛斯看来，"……预先知道你要找什么，这总少不了的"(希斯[1925]，1，第129页)。帕普斯说："他们讲过，定理就是为了求其得证才提出来的东西"(同上，1，第10页)。在演绎中途偶尔碰上而不曾事先猜中的命题，希腊人是瞧不起的。按他们的叫法，这些命题是系论，是系理，是从定理的证明或问题的解答里蹦出来的附带产品，这种产品人们原先并不想找，但竟然不花一点额外劳动就不期而遇了，所以，如普罗克洛斯所说，只算是意外之财(ermaion)或外快(kerdos)而已(同上，1，第278页)。在欧拉[1756—1757]的编者提要里，我们也读到：算术定理"远在由严格的证明确认其真实性之前就发现了"；这种发现过程，编者和欧拉都是用摩登术语"归纳"相称，不再用古代的"分析"(同上)。在助探论上结果在论据之先、定理在证明之先的观念，也深深扎根于数学轶闻之中了。引用一下同一个流俗话题的几个变种。传说克里西普斯写信给克林特斯说："只要借些定理给我，我自会找出证明的"(参见第欧根尼·拉尔修[约200]，VII，第179页)。传说高斯发过怨言："我的结果早已到手了，我却不知道该怎么得出这些结果"(参见阿尔伯[1954]，第47页)；黎曼也一样："但愿我手里有定理！届时我想必会易如反掌地找出证明"(参见荷德尔[1924]，第487页)。如今波亚又强调："证明一个数学定理之前，你得先猜到它才行"([1954]，第1卷，第vi页)。

"准实验"一词出自前文提到的欧拉[1756—1757]的编者提要。据编者说："既然我们必须把数托付给纯粹的理智活动，大家可能很难理解研究数的性质怎么会用得上观察和准实验。然而，我在这里要有根有据地告诉你们，今天知道的数的性质大多是靠观察发现的……"(波亚的译文：他在[1954]，1，第3页上误认为这段引文是欧拉的话。)

3. 用局部而非全局反例来批评证明

教师：按证明提示的办法把猜想作了分解，就为检验开了新的方便之门。经过分解，猜想散布在一条更宽阔的前沿阵地上，于是我们的批评就有更多的靶子了。现在至少有三个找反例的机会，不只是一个啦！

伽马：我已经表示过了，我厌恶您的第三引理(就是说，从绷开之后又作三角剖分所得到的网络里移走三角形的时候，只有两种可能：要么移走一棱，要么移走二棱一顶点)。我疑心，移走三角形的时候，说不定要冒出别的花样。

教师：疑心算不上批评。

伽马：反例算得上吗？

教师：当然。猜想不理会厌恶和疑心，却不会不理会反例。

帖塔(旁白)：猜想和猜想者显然不是一号脾气。

伽马：我举个平淡的反例。且看在立方体上实行头两道工序之后得到的三角化网络(图 2)。现在，假使我是从这网络内部移走一个三角形，就象是从玩具拼图里取出一块似的，这时，我连一个棱或顶点也没移走，却把一个三角形移走了。所以说，第三引理是假的，不但对立方体假，对所有多面体都假，唯独四面体例外，因为四面体的平网络里一切三角形都是边界三角形。由此看来，您的证明是在给四面体的欧拉定理作证明。但是，对于四面体 $V-E+F=2$，我们早已知道了，何必证明？

教师：你说得对。不过要注意，立方体虽是第三引理的反例，还算不上主猜想的反例，要知道，对于立方体，$V-E+F=2$ 还是成立的。你说明了论据不足或证明无力，但没有说明我们的猜想是假的。

阿尔发：这么说，您要抹掉您的证明了？

教师：不。批评未必是破坏。我要改进我的证明，使它顶得住批评。

伽马：怎么改进？

教师：让我先引进下面的术语，再告诉你怎么改进。驳倒引理(未必驳倒主猜想)的例子，我要叫做“局部反例”；驳倒主猜想本身的例子，我要叫做“全局反例”。可见，你的反例只是局部的，不是全局的。局部而非全局反例是对证明的批评，但不是对猜想的批评。

伽马：所以，猜想尽可是真的，但您的证明不是在给它作证明。

教师：不过，我能不费力地琢磨和改进证明，只要把假引理换成你的反例驳不倒的、略微改过一下的引理就行了。我不再死死抱住移走任何三角形都合乎我提到的那两种花样了，我只说在移除手术的每一步移走任何边界三角形总合乎那两种花样。回顾我的思想实验，我需要干的全部事情就是在第三步里插进一个单词，不外是说：“现在从作过三角剖分的网络里把边界三角形一个一个移走”。你准会同意，只需要一点微不足道的观察，证明就改对了。①

伽马：我不觉得您的观察那么微不足道；说实在的，它倒很有点独具匠心。为了让大家看清这个真相，我来叫它现现假的原形。再看立方体的平网络。按图 4 定的次序从十个三角形里移走八个。轮到移第八个的时候，它肯定是个边界三角形，可是移走的是两个棱和零个顶点。因此 $V-E+F$ 变了，少去 1。

① 吕里埃曾用大同小异的办法改正欧拉的一个证明。当时他说他只作了一点“微不足道的观察”([1812—1813a]，第179页)。欧拉本人反而放弃了那个证明，因为他察觉会有麻烦，作不了那一点“微不足道的观察”。

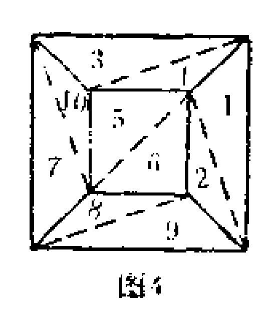


图4

而且，剩下的也成了两个隔离的三角形 9 和10。

教师：唉，我要是能说我所谓边界三角形是指移走了不致使网络断裂的三角形，我就可以挽回面子喽。可是，做学问要诚实，不许我用“我所谓……是指……”这类声明来偷偷改变立场。所以，我承认，我现在必须把三角形移除手术的第二种提法换成第三种：按某种使得$V-E+F$不变的办法把三角形一个一个移走。

卡帕：我可以同意跟这种手术相应的引理是真的，就是说：如果按某种使得$V-E+F$不变的办法把三角形一个一个移走，那么$V-E+F$不变。

教师：不对。那条引理是：可以给网络里的三角形编上号，按这种正确次序移走三角形时，$V-E+F$不会变，直到得出最末一个三角形为止。

卡帕：可是，就算有这种正确次序，又该怎么去构造呢？①您原来的思想实验颁布的指令是：不拘次序地移走三角形。您改了的思想实验颁布的指令是：不拘次序地移走边界三角形。如今您又说务必遵从一定的次序，但说不出是哪种次序，也说不出它存在不存在。您的思想实验就此垮台。您老在改进证明分

---

① 哥西认为，在任何多面体上都能稀松平常地实施这条指令：每步找出一个移走二棱一顶点或移走一棱就能把它移走的三角形（[1813a]，第79页）。这跟他没有能力想象不与球面同胚的多面体有关。

析，也就是改进引理清单；而您美其名为“证明”的思想实验却荡然无存了。

罗：荡然无存的只是第三步嘛。

卡帕：况且您改进了引理吗？您头两种简朴的提法，至少在被人驳倒之前看模样还真得平淡；您这个满身补丁长而又长的提法，看模样就不合情理。您真相信它能躲掉反驳么？

教师："合乎情理"乃至"真得平淡"的命题照例马上就被驳倒了。矫揉造作、不合情理的猜想，倘若是在批评中成熟的，或许倒会击中真理。

欧米伽：万一连您的"矫揉造作的猜想"也被否证掉了，万一您到时候拿不出没被否证的猜想来换班，如何是好？换句话，万一您力不从心，再怎么补补缝缝也改进不了论据呢？您仗着能更换被驳倒的引理，如愿以偿地制服了一个非全局的局部反例。万一您下次不能如愿，如何是好？

教师：问得好，明日再议。

4. 用全局反例来批评猜想

阿尔发：我有个反例，既会否证掉您的第一引理，又是主猜想的反例，也就是说，兼为全局反例。

教师：真的！这倒有意思。让我们见识见识。

阿尔发：想象由一对套装立方体围成的立体；这对立方体有一个在另一个内部，但不跟它接触（图5）。这个空腔立方体否证了您的第一引理，因为，从在内的立方体上移走一面，不能把多面体绷到平面上。换个招，从在外的立方体上移走一面，照样无济于事。除此以外，对于两个立方体各有$V-E+F=2$，所以，对于空腔立方体应有$V-E+F=4$。

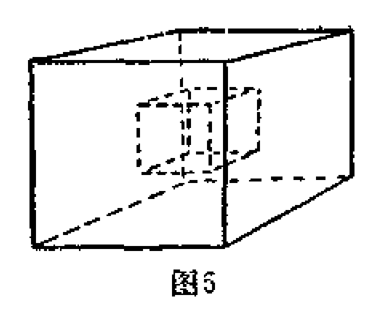


图5

教师：漂亮。让我们把它叫做反例1。① 还有什么反例？

(a) 拒绝猜想．投降法

伽马：老师，您那副沉着劲叫我不知说什么好。一个反例单枪匹马就能把猜想驳倒，跟十个反例一样见效。猜想也罢，您的证明也罢，全部是放空炮。举起手来啊！您不投降不行了。还是抹掉假的猜想，忘掉那回事，想法子另找崭新的路子吧。

教师：由于阿尔发的反例，这个猜想挨了一次狠狠的批评，你这么说，我是同意的。要说证明“全部是放空炮”，可就失真了。假使暂时你还同意我早先的建议，用“证明”一词指一个“把原猜想分解成子猜想的思想实验”，而不用来指“确凿真理的保证”，你大可不必下这个结论。按前一种涵义我的证明无疑证明了欧拉猜想，按后一种涵义却未必。你感兴趣的只是“证”其所

① 吕里埃（[1812—1813a]，第194页）最先注意到这个反例1。但是，据编者日果内的附言（第186页），远在吕里埃的文章之前，他本人就注意到了。前一年才发表了他的证明的哥西却没有这样的眼力。过了二十年，赫塞尔又再度发现了这个反例（[1832]，第16页）。吕里埃和赫塞尔都是由矿物采集领路才得出他们的发现的，当时他们察觉有一些双晶体，在内的晶体不是半透明的，在外的晶体是半透明的。吕里埃明文感谢他朋友皮克泰特的晶体采集对他有所刺激（[1812—1813a]，第188页）。赫塞尔撂到了包在半透明的氟化钙晶体里的硫化铅立方体（[1832]，第16页）。

求证者的那些证明。我对各种证明都感兴趣，即使它们没有完成原定任务。哥伦布没有到达印度，但是发现了某种十分有趣的东西。

阿尔发：如此说来，按您的哲学，局部反例（如果不同时是全局反例）只是对证明而不是对猜想的批评，全局反例又只是对猜想而不一定是对证明的批评。谈到猜想，您同意投降，可是您还要保卫证明。不过，既然猜想是假的，证明究竟在证明什么呢？

伽马：您扯出哥伦布来类比也不中用。接受一个全局反例只能意味着全面投降。

(b) 拒绝反例.怪物除外法

德尔塔：可是，为什么要接受阿尔发的反例呢？我们的猜想是证明过的，如今它就是定理。它跟这个所谓的"反例"发生冲突，这我承认。双方总得有一方让路不可。但定理既已证明，又凭什么该它让路呢？倒是那个"批评"应当撤离。这是冒牌批评。那对套装立方体根本不是多面体。它是怪物，是病例，不是反例。

伽马：凭什么不是？多面体是由多边形面组成其表面的立体。我的反例正是多边形面围成的立体嘛。

教师：让我们把这个定义叫做定义1。①

德尔塔：你的定义不正确。多面体必须是一个曲面，有面，

① 定义1最先见于十八世纪：例如："任何由平面围成的立体，人们都冠以多面立体之名，或简称多面体"（勒让德[1809]，第160页）。欧拉下过类似的定义（[1758a]）。欧几里得给立方体、八面体、棱锥体、棱柱体下过定义，并没有给多面体这个通名下过定义，但偶尔也用（例如第XII卷，第二问题，命题17）。

有棱，有顶点，能变形，能在黑板上绷开，跟“立体”概念没一点儿关系。多面体是由一个多边形系统组成的曲面。

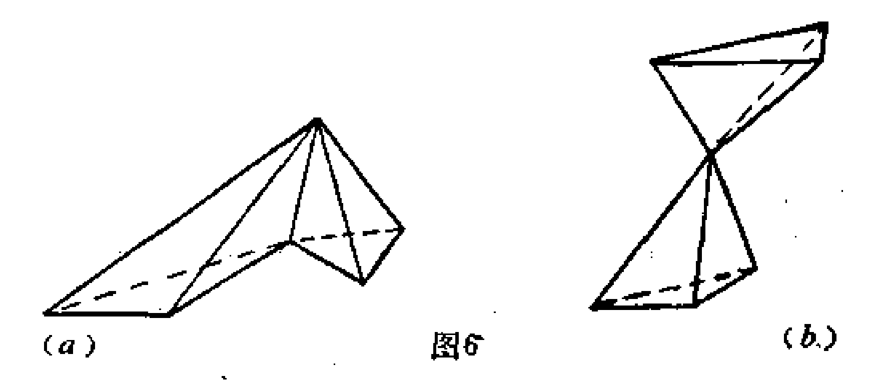
教师：这叫定义2。①

德尔塔：所以，你给我们看的其实是两个多面体，一内一外的两个曲面。腹中有胎儿的妇女总不是人长一只脑袋的反例。

阿尔发：得了吧！我的反例已经产下一胎新的多面体概念了。难道你敢断定你所谓多面体永远是指一个曲面？

教师：我们不妨暂且接受德尔塔的定义2。如果所谓多面体是指一个曲面，你还驳得倒我们的猜想吗？

阿尔发：不言而喻。取共有一棱的两个四面体(图6(a))，不然就取共有一顶点的两个四面体(图6(b))。这两对孪生子都



(a) 图6 (b)

是连通的，都构成一个整曲面。对于两者都有$V-E+F=3$，你们只管核查便是。

---

① 德荣奎埃针对那些存心驳倒欧拉定理的家伙，向法兰西科学院宣读了几篇文章，我们从其中一篇中隐约发现了定义2。这批文章堪称怪物除外术大全。他朝着吕里埃那对怪里怪气的套装立方体大发雷霆："这个系统实在不是一个多面体，而是一对彼此独立的、各是各的多面体……至少从古典观点看，一个名副其实的多面体起码要能够以一点连续移遍它的表面才行；这里并非如此……所以吕里埃的这头一个例外尽可以弃置不顾"([1890b]，第170页)。这个定义与定义1相反，正合解析拓扑学家的胃口，这些人迷的不是多面体理论本身，而是要它给曲面理论当侍女。

教师：反例2a和2b。①

德尔塔：你这种邪魔外道的想象能力，我佩服。不过，我自然不是说任何多边形系统都是多面体。我所谓多面体是指这样排列的多边形系统：(1)每个棱上恰好有两个多边形相交；(2)有可能沿一条从不在顶点穿过任何棱的路线，从任何多边形内部到任何别的多边形内部。你的第一对孪生子被我定义里的第一条准则排除了，你的第二对孪生子被第二条准则排除了。

教师：定义3。②

阿尔发：你这种邪魔外道的应变本领，我佩服，想不到你能一个接一个地发明定义，严防别人否证你的高见。何不干脆把多面体定义成满足等式$V-E+F=2$的多边形系统呢？有了这个完善的定义……

卡帕：定义善。③

阿尔发：……争论自会一了百了。再研究这个题目也就毫无必要。

德尔塔：可是，世上也没有什么定理不能拿怪物来否证掉的。

教师：对不起，打断你的话。靠反例作反驳离不开有关术

---

① 反例2a和2b，吕里埃忽略了，赫塞尔才首次发现([1832]，第13页)。

② 在梅比乌斯手里，定义3第一次出面抵挡孪生四面体([1865]，第32页)。我们发觉，他那臃肿的定义又重新出现在某些现代教科书里，照例仍是一副"非舍即取"的权威口气；至于它的怪物除外履历，本来至少能解释它是怎么回事，却没有谈起(例如希尔伯特和康福森[1956]，第290页)。

③ 依了定义善，欧拉性会成为多面体的定义特征，但巴采尔事实上就主张这样定义："我们有时(效法赫塞尔)称普通多面体为欧拉多面体。对那些名不副实的(uneigentliche)多面体，还是另找一个特别的名称为好"([1862]，第2卷，第207页)。牵扯赫塞尔可不光明磊落。赫塞尔不过是用"欧拉的"这个术语作满足欧拉关系式的多面体的缩写，想突出它们与非欧拉多面体的区别([1832]，第19页)。关于定义善，也见下一脚注中引用的施赖夫里的话。

语的意义，这是大家有目共睹的了。一定要对我们所用术语的意义有一致意见，否则反例休想成为客观的批评。要是彼此谈不拢，给术语下定义未尝不是达成协议的一个办法。至于“多面体”嘛，起码我没下过定义。我假定了大家都熟悉这个概念，就是说，都有能力区分一个东西是不是多面体。按有的逻辑学家的说法，这叫知道多面体概念的外延。殊不知，这个概念的外延根本就不是显而易见的。一出反例，你们就频频提出各种定义，而且发生争执了。我建议，这会儿先同时考虑相互竞争的定义，过一阵子再讨论选择不同的定义引起的结果有什么区别。有谁能举出一样东西，连最最窄的定义也得承认它是真正的反例吗？

卡帕：定义善也在内？

教师：定义善在外。

伽马：我能。瞧瞧这个反例3，一个星状多面体。我要叫它“海胆”（图7）。它是由12个五角星组成的（图8）。它有12个

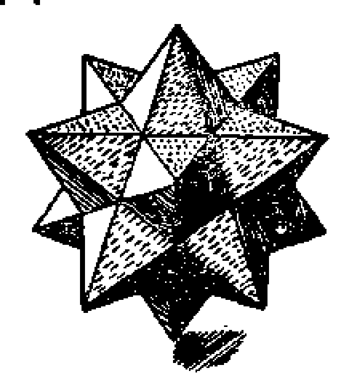


图7.开普勒的星状多面体。为了表明哪些三角形是属于同一面的，每一面都用不同方式描影。

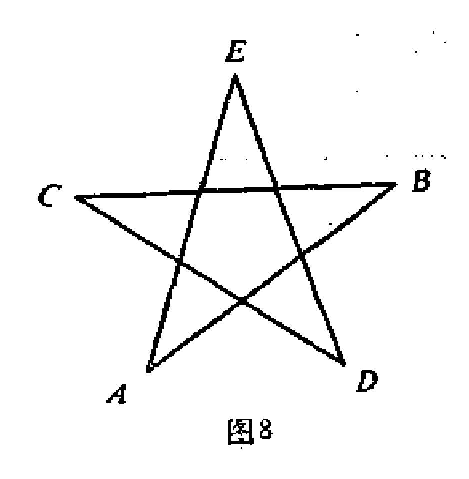


图8

顶点，30个棱，12个五边形面。假使诸位乐意核查，不妨数一数。足见笛卡儿-欧拉论点根本不真，因为，对于这个多面体

$V-E+F=-6$。①

德尔塔：你凭什么认为“海胆”算多面体？

伽马：你没瞧见吗？这是一个多面体，它的面是十二个五角星。它满足你刚才下的定义，因为，它是“这样排列的多边形系统：(1) 每个棱上恰好有两个多边形相交；(2) 有可能从每个多边形到达别的每个多边形，而又从不穿过多面体的顶点”。

德尔塔：这就足见你连什么是多边形都不懂！五角星当然不是多边形！多边形是**这样排列的棱系统：(1) 每个顶点上恰好有两个棱相交；(2)各棱没有公共点，除了顶点以外**。

教师：这就叫**定义 4** 吧。

伽马：你凭什么加上第二个子句，我不明白。多边形的正确定义应当只有第一个子句。

教师：定义4′。

伽马：第二个子句跟多边形的本质没一点关系。瞧：我只要把棱拎高一丁点儿，五角星按你的涵义就也该算多边形了。你把多边形想象成了用白粉画在黑板上的，而你本来应当把它想象成一只木头架子。那样就很清楚，你心目中的公共点其实并非一点，倒是一上一下的两个不相同的点。你之误入歧途，是因为你把多边形埋进一个平面。你本来应当让它放开手脚在

---

① “海胆”最先由开普勒在他的宇宙论里讨论([1619]，第II、XIX、XXVI册，在第72页和第82—83页上；又见第V册的第I章第293页，第III章第299页，以及第IX、XLVII章)。“海胆”这个名字是开普勒取的(“cui nomen Echino feci”)。图7也是从他的书中(第79页)复制的，该书第293页上还有另一幅图。庞索特再度独立发现了海胆，正是他指出欧拉公式对它不适用([1810]，第48页)。现行标准术语“小星芒状十二面体”出自凯利([1859]，第125页)。施赖夫里承认一般的星状多面体，但到底把小星芒状十二面体当怪物给拒绝了。据他说，“这不是真正的多面体，因为它不满足$V-E+F=2$这个条件”([1852]，§34)。

空间中伸一伸！①

德尔塔：劳你的大驾告诉我五角星的面积是什么，可好？或许你要说有些多边形无面积可言吧？

伽马：你自己不是说过多面体跟立体观念没一点关系吗？怎么现在又主张多边形观念该跟面积观念挂钩呢？你我达成了协议，认定多面体是一个有棱和顶点的封闭曲面。既然如此，何不再达成协议，认定多边形也不外是一条有顶点的封闭曲线？不过，假使你固执己见，我还是愿意给五角星的面积下定义的。②

---

① 多面体按定义该不该包括星状多边形（该取定义4还是该取定义4′），这种争论老而又老。本对话中摆出的论据——嵌入高维空间之后星状多边形会变成普通多边形——是现代拓扑学的论据，但也还有别种论据可摆。譬如说，为保卫自己的星状多面体，庞索特用过解析几何论据来辩护该容许星状多边形："……（'普通'与'星状'多边形之间）这种种差别相当表面，不大真实，一旦作解析处理也就消逝一空，因为这时各类多边形简直不可分隔。正多边形的棱对应于一实根方程，从它可一举得出同阶的一切正多边形的棱。譬如说，不可能得到了内接于圆的某正七边形的棱而求不出第二、三类七边形的棱。反之，已知某正七边形的棱，可定出它所能内接的圆的半径，据此又会求出三个不同的圆，与已知棱上可作的三类七边形相对应；其他多边形也相仿。可见，我们有理由给这些新式星状图形冠以'多边形'之名"（[1810]，第26页）。施罗德则用汉克尔式的论据："把原来只限于整数的幂概念推广到有理分式，在代数里很有成效：由此联想，在几何里，只要机会到了，也该试试同样的做法……"（[1862]，第56页）。随后他告诉大家，在星状多边形中是可以给p/q条边的多边形概念找到一种几何解释的。

② 伽马自称他能给星状多边形的面积下定义，并非虚张声势。保卫较宽的多边形概念的人，有的就是靠摆出较宽的多边形面积概念来解决问题。就正则星状多边形而言，做法格外明显。一个多边形的面积，尽可看作内接圆或外切圆的圆心与各边连成的各等腰三角形的面积之和。诚然，这时星状多边形的某些"部分"要计算一次以上。就非正则星状多边形而言，得不到任一独特的点，但仍可任取一原点，把负定向三角形当成有负面积（迈斯特尔[1771]，第179页）。这样定义的面积居然不取决于原点如何选择，这无疑与我们对"面积"的期望相合（梅比乌斯[1827]，第218页）。当然，有人认为这样算出的数不配叫"面积"，所以争论在所难免；但据迈斯特尔-梅比乌斯定义的保卫者说，这才叫"科学上唯一可靠"的"正确定义"（豪斯纳[1906]按语，第114—115页）。本质主义是定义之争的一个经久不变的特色。

教师：眼下别争这个问题了，还象原先那样谈下去吧。同时考虑刚才那两个定义，即定义 4 和定义4′。有谁能给我们的猜想举个反例，跟这两种多边形定义都相符？

阿尔发：反例在此。考虑这样的一个画框(图 9)。按至今提出的任何定义，这都是多面体。可是，数一数顶点、棱和面，你

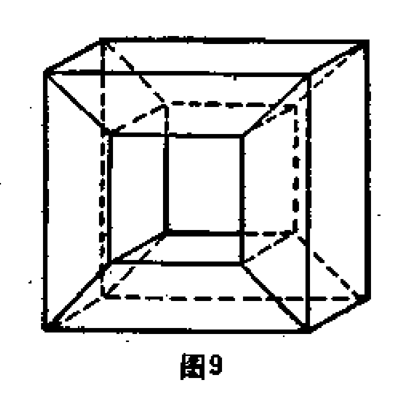


图9

们会发现$V-E+F=0$。

教师：反例 4。①

倍塔：这下子我们的猜想完事大吉。真是遗憾，因为过去碰到那么多的情况，它都一一应验了。但是，看来也只好说我们是在白糟蹋时间了。

阿尔发：德尔塔，我不胜惊诧。你没词儿了？你不能再来个定义，把我的新反例化为乌有吗？我还以为，世上没有什么假说，你不能玩上一套恰到好处的语言魔术，解除它惨遭否证的厄运哩。现在你服输了？你到底承认有非欧拉的多面体了？多么难以置信啊！

德尔塔：你真该给你那些非欧拉的瘟源体找个贴切点的名字，别叫什么“多面体”，搞得大伙儿都误入迷途。但是，我对你

① 反例 4 又是在吕里埃的经典著作[1812—1813a]里找到的，见于第185页。日果内再次附言，说他已经知道了。但是，格龙奈特十四年后还不知道([1827])，庞索特四十五年后也还是不知道([1858]，第67页)。

的怪物们渐渐丧失兴趣了。这种不合美丽的欧拉定理的可悲的“多面体”，我觉得恶心，宁可躲到一边去。① 我在数学里寻求秩序与和谐，你却一味宣扬无政府与无规矩。② 你我的态度势不两立。

阿尔发：你是个地地道道的老托利党！无政府主义者搅乱了你的“秩序”与“和谐”，你就责骂人家缺德。可你呢，你“解决”困难全靠变着花样吹捧字眼儿。

教师：让我们听听最新救生定义吧。

阿尔发：您是说最新语言魔术、最新“多面体”概念收缩妙方吧！德尔塔是在取消真正的问题，根本不想解决。

德尔塔：我才没有收缩概念，倒是你在扩充概念。比方说，这个画框就根本不是真正的多面体。

阿尔发：为什么？

德尔塔：在“坑道”——周围是画框的那部分空间——中取任意一点。穿过这一点安放一个平面。你会发现，凡属这类平面总是跟画框有两个不同的截面，造成两个完全隔离的各是各的多边形啦！（图10）

阿尔发：那又怎么样呢？

德尔塔：就真正的多面体而言，穿过空间中任意一点，至少有一平面与多面体的截面是单个多边形。就凸多面体而言，所

① 套用埃尔米特写给斯蒂杰斯的一封信，原话是：“这场无导数函数的可悲的瘟疫，我吓得魂不附体，宁可躲到一边去”（[1893]）。

② “研究……那些破坏了人们盼望的普遍规律的函数，差不多被看作是跑到历代先人寻求秩序与和谐的地盘里去宣扬无政府与无规矩”（萨克斯 [1933]，前言）。萨克斯这话是指怪物除外者（象埃尔米特！）与反驳主义者之间凶猛的战斗。在十九世纪最后几十年里（实际上也包括二十世纪初），这种战斗成了现代实函数论这个“跟反例打交道的数学分支”（芒罗[1953]，前言）发展的特色。不久后爆发的现代数理逻辑和集合论的反对者与提倡者之间同样凶猛的战斗，是它的直接继续。又见下面第22页注①和注②。

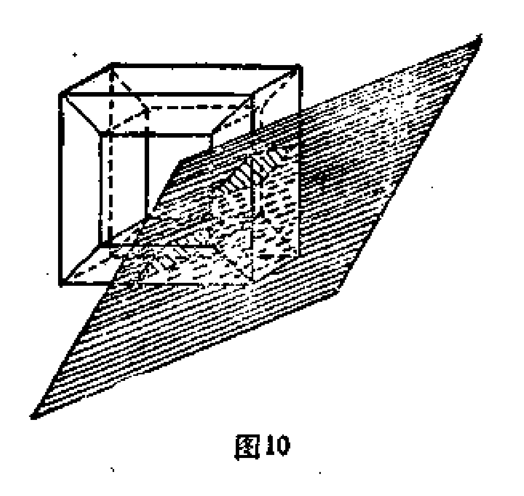
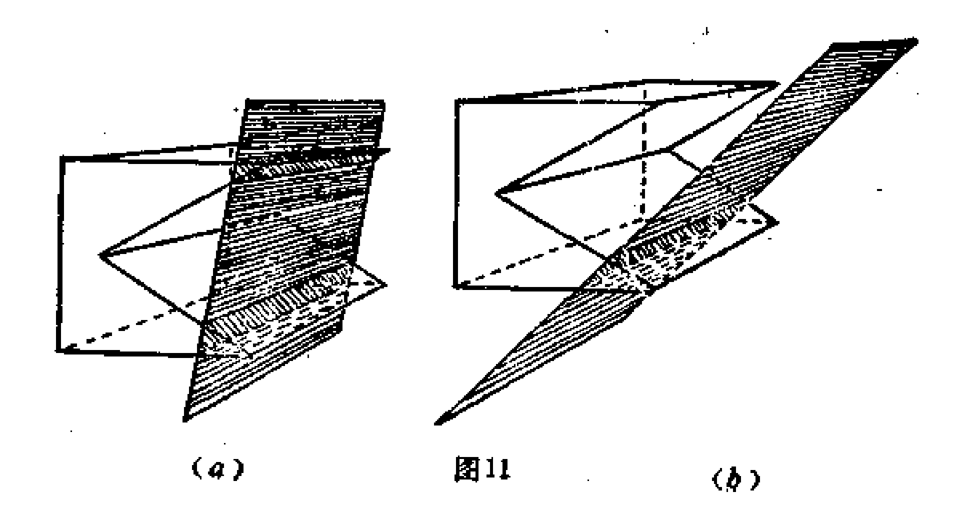


图10



（a） 图11 （b）

有平面都合这条要求，不管是在哪里取那一点。就普通凹多面体而言，某些平面会有多个交，但总会有某些平面只有一个交(图11(a)和(b))。就这个画框而言，只要是在坑道中取那一点，所有平面都会有两个截面。这怎么能叫多面体呢？

教师：这好象是另下了一个定义，这一回可是隐定义了。

叫它定义5。①

阿尔发：给他一串反例，还你一串旗鼓相当的定义！引用这些定义决不是有什么新鲜东西要讲，只不过是想把那个独家老牌概念粉饰一新，再显显它丰富绝顶，似乎有多少反例，它里边自有多少"隐蔽"子句。对于所有多面体 $V-E+F=2$ 似乎不可动摇，堪称老牌的"永恒"真理。奇怪的是，我还能回想起它一度也曾是个惊人的推测，处处在将人的军又在催人奋进。如今，因为你象搞巫术似地变换词义，它已经沦为一项贫乏的约定、一个无足挂齿的教条。（他离开教室。）

德尔塔：我无法理解，象阿尔法那么能干的人，怎么会甘心一味挑眼儿，浪费他的才能。他似乎一门心思生产畸形。然而无论在自然界还是思想界，畸形从来不促进生长。进化永远是以和谐而秩序井然的模式为准绳的。

伽马：遗传学家能轻而易举驳倒这句话。你没听说过生产畸形的突变在大进化里起着可观的作用吗？他们把这类畸形突变体叫做"有指望的怪物"。阿尔发的反例虽是怪物，在我看来，却是"有指望的怪物"。②

---

① 为了赶走吕里埃的有坑道多面体（画框），不屈不挠的怪物除外者德荣奎埃摆出了定义5："按'多面体'一词的普通涵义，这个多面的复合体也算不上真正的多面体。因为，取任何平面，如果它穿过某条坑道内部的任意一点，随之也正好穿过这个立体，那么，得到的截面就会是两个彼此完全不连通的各是各的多边形；这种情况，在普通多面体上，相对于交截平面的某些位置也可能出现（就是说，对某些凹多面体可能出现），但不会是相对于所有位置都出现"（[1890b]，第170—171页）。人们很想知道，德荣奎埃是否注意到了，按他的定义5，有的球性凹多面体也要排除掉。

② "我们决不能忘记，今天还算怪物的东西，明天会成为一条特定适应路线的起点……使决定性胚胎发育过程改观的突变为数稀少，但来势极猛。我要再强调一下它们的重要性。这些突变可以产生某种东西，我们不妨称之为有指望的怪物，这类怪物一旦填进环境中的某个空位，便会启动一条新的进化路线"（戈德施米特[1933]，第544页和第547页）。这篇文章是波普尔提醒我注意的。

德尔塔：反正阿尔发已经放弃战斗了。现在总不再有怪物了。

伽马：我又有个新怪物了。定义1，2，3，4，5里的一切限制，它无不相合，但$V-E+F=1$.这个反例5就是一个简简单单的柱子。它有3个面（顶、底、套圈），2个棱（两个圆），没有顶点。按你的定义，它是多面体：(1)每个棱上恰好有两个多边形；(2)有可能沿一条从不在顶点穿过任何棱的路线，从任何多边形内部到达别的任何多边形内部。它的各面都是真正的多边形，你也得承认，因为跟你的要求也相合：(1)每个顶点上恰好有两个棱相交；(2)各棱没有公共点，除了顶点以外。

德尔塔：阿尔发是把概念绷开，你倒好，把概念都撕破啦！你的"棱"不是棱！棱有两个顶点。

教师：定义6？

伽马：只有一个乃至可能只有零个顶点的棱，为什么就不配叫"棱"？你老有收缩概念的习惯，现在倒好，索性把概念砍胳臂锯腿，几乎不剩下什么啦！

德尔塔：难道你就看不出这些所谓的反驳穷极无聊吗？"前人发明新的多面体，向来是为了某种实用的目的；今天发明这样的多面体是专诚贬斥我们先师的推理，除了这一套，从来不想教人学点别的本事。我们的学科变成了一所畸形学陈列馆，正正派派的普通多面体只要能在馆内保住一个小小的角落，也就该知足常乐了。"①

伽马：据我看，如果我们想把一样东西真正学深学透，决不能按它"正常"、规矩、平时的式样去研究，倒非得趁它危在旦夕、兴奋若狂、怒不可遏的关头下手。你想懂正常的健康的人体么，等他反常，等他害病，那才是研究他的好时候。你想懂函数么，你就研究函数的奇异性。你想懂普通的多面体么，你

就研究多面体中最无法无天的极端分子。数学的分析，正是靠这种法子，才得以深入这门学科的心脏的。② 不过，姑且算你大体上言之有理，难道你就看不出你这种顾此失彼(ad hoc)的方法穷极无聊吗？想在反例跟怪物当中画出一条界线，也不兴于一会歇一阵呀！

教师：据我看，我们理应拒不接受德尔塔对付全局反例的战略，尽管他运用得如此娴熟是值得恭维的。我们尽可恰如其分地给他的方法贴个标签，叫做怪物除外法。采用这套方法，原猜想的任何反例总可以消除，反正重新下个定义就行，要么是给多面体，要么是给它的定义项，要么是给它的定义项的定义项。下的定义有时倒也机智，但始终免不了顾此失彼。我们终究要对反例放尊重些才是，可别授予"怪物"的雅号、不驱逐它就誓不甘休。德尔塔的主要过错，恐怕是在数学证明的解释上陷入了教条主义偏见。他以为，一个证明必然是在证其所求证者。按我对证明作的解释，假的猜想也能"得证"，就是说，能分解成一些子猜想。如果猜想是假的，我当然料定子猜想里至

---

① 套用庞卡勒的话（[1908]，第131—132页）。完整的原文是这样的：

"逻辑有时候在制造怪物。半个世纪以来，我们眼看着出了一大堆光怪陆离的函数，瞧那副神气，是安心跟有点用处的忠厚函数尽量长得别太象。要无连续性，或者虽有连续性也要无导数，等等，等等。不仅如此，从逻辑的观点看，还得说这些奇特的函数才是最一般的。不找自来的函数除非作为特例反倒不复可见了。留给它们的只是一个小小的角落。

"前人发明新的函数，向来是为了某种实用的目的；今天发明这样的函数是专诚贬斥我们先师的推理，除了这一套，从来不想教人学点别的本事。

"倘若逻辑竟成了教师的唯一向导，就必然要先讲最一般的函数，也就是说，先讲最光怪陆离的函数。不得不跟这所畸形学陈列馆格斗的倒该是初学者了……"（霍尔斯特德的权威译本，第435—436页。）

庞卡勒是针对实函数论的局面讨论这个问题的，但是这无关紧要。

② 套用当若依的话（[1919]，第21页）。

少有一个假，但这无碍于分解方式仍然挺有意思嘛！我才不因为“已证”的猜想也找出了反例就大惊小怪；我甚至情愿下功夫去“证明”假猜想。

帖塔：我才不跟你学哩。

卡帕：他只跟《新约全书》学：“察验一切，持守善者”（帖撒罗尼迦前书，第五章，第21节）。

(c) 用例外除外法来改进猜想．逐一排除．战略撤退或为安全而孤注一掷

倍塔：老师，想来您正打算把您这些莫名其妙的话解释一下。可是，请千万原谅我性急，我骨鲠在喉，不吐不行啦。

教师：说下去吧。

（阿尔发重入。）

倍塔：我觉得德尔塔的辩解有点傻里傻气，可是，到头来我还是相信其中有一个合理的内核。据我现在的看法，猜想没一个普遍有效，都不过是在排除了例外的某个有限范围内才有效。给这些例外授予“怪物”或“病例”的雅号，我反对。那等于从方法论上决意把它们打入另册，不考虑人家也是有趣的例子，也值得单另立案调查调查。不过，“反例”这个字眼儿，我也反对。这总算不错，还承认人家是可以跟正例平起平坐的例子，但不知怎么搞的又给它们抹了一身好战色彩，结果象伽马这号人一撞见了就惊惶失措，禁不住把美妙精巧的证明也一古脑儿丢掉拉倒。叫错了，它们只是例外而已。

西格马：百分之百同意。“反例”这个字眼儿有侵略气息，要触怒发明证明的先生们。“例外”才是正确的用语。“有三类数学命题：

“1．永远真的，既无限制又无例外，例如所有三角形内角之和永远等于二直角。

“2．依赖于某个假原理，因而无论如何不能容许的。

“3．虽然立足于真原理，但在某些情况下容许有限制或例外的……”

易卜西隆：什么？

西格马：“……不应当把假定理跟要受某种限制的定理混为一谈。”① 正如谚语所说：例外倒证明了规则。

易卜西隆（朝着卡帕）：这位糊涂蛋是谁？他应当学点逻辑。

卡帕（朝着易卜西隆）：还得懂点非欧几里得平面三角形。

德尔塔：我觉得挺难堪，因为，我不得不预言，讨论到这个问题，阿尔发和我大概要站在一边。我们俩都以命题非真即假作为立论的基点，只是具体谈到欧拉定理是真是假才有了不同意见。可是，西格马却要我们承认第三类命题，说这类命题“原则上”是真的，但“在某些情况下容许有例外”。赞成定理与例外和平共处，在数学中等于眼看天下大乱还要委屈求全。

阿尔发：同意。

艾塔：我一直不想干扰德尔塔才华横溢的辩论。这会儿我想，如果把我本人的发蒙经过大略解释一下，也许不无好处。我是在中学时代变的，按诸位的叫法，变成了一个怪物除外者，并不是要抵御阿尔发派，倒是要抵御西格马派。关于欧拉定理，我还记得一本杂志里的讲法：“关于欧拉定理的普遍有效性，一些声名显赫的数学家已经提出过种种证明了。不过，它是允许有例外的……有必要提醒大家注意这些例外，要知道，就连当代学

---

① 贝哈德[1818—1819]，第347页和第349页。

者也不是始终对它们有明确认识的。"①要说玩弄外交辞令，这篇文章决非孤例，还有呢："几何教科书和讲义总是指出，美丽的欧拉定理$V+F=E+2$在某些情况下要受'限制'，或者说，它'似乎不是有效的'，可是，谁也搞不懂有这些例外的真正理由是什么"。②好吧，我就把这些"例外"小心翼翼地查看了一遍。我终于得出结论：它们都跟多面体的真定义不合。所以，证明和定理可以复原，定理与例外的混乱共处从此不见了。

阿尔发：西格马的混乱立场也许能解释你搞怪物除外的起因，但不能替你开脱，更说明不了你有理由。既要消除混乱局面，为什么不把反例的资格证书如数收下，而把"定理"和"证明"拒之门外呢？

艾塔：为什么我非要把证明拒之门外不可呢？我看不出它有一丝一毫的错。你看得出么？我搞怪物除外似乎总比你搞证明除外讲点道理吧。

教师：从他们俩的争执该明白了吧，怪物除外假使是来源于艾塔那种左右为难的处境，说不定会博得听众较大的同情。不过，我们还是回过头来谈谈倍塔和西格马。倍塔给反例改了名字，叫做例外。西格马附和了倍塔……

倍塔：我真高兴西格马附和了我，但我很担心我不能附和他。命题确有三个类型：真的，假得无指望的，假得有指望的。

---

① 赫塞尔［1832］，第13页。赫塞尔在1832年再度发现了吕里埃的种种"例外"。他刚刚寄走自己的稿子，就偶然读到了吕里埃的［1812—1813a］，这才知道他那篇文章的大部分结果都是别人发表过的。尽管如此，他决意不撤回，因为他认为该向无视这些例外的"当代学者"好好讲讲这个道理。顺便说说，这些学者里有一个凑巧是赫塞尔投稿的那家杂志的编者克瑞勒，他曾在教科书［1826—1827］里"证明"过欧拉定理对所有多面体都是真的（第2卷，第668—671页）。

② 马梯森（［1863］，第449页）。这话是指海斯与艾施外勒尔的《几何教科书》和格龙奈特的《立体几何教程》。然而，马梯森解决问题不是象艾塔那样靠怪物除外，而是象罗那样靠怪物校正（参见第41页注①）。

最后这类命题，只要添上一个指出有哪些例外的限制子句，都能改进成真的。我从来不"让公式的有效范围悬而不决。现存的公式，大多数只有满足了一定条件之后才是真的。我把这些条件都规定了，当然还把我用的术语的意义都扣准了，我也就使不确实的成分统统绝迹了"。① 所以，你们看，我并不提倡不改进公式而让它跟例外搞任何一种和平共处。我是去改进公式，叫它们都象西格马第一类命题那样，向完善公式转化。这话意思就是：怪物除外法可能是为寻找原猜想的有效范围出力，在这个限度内，我接受它；也可能是在要语言魔术，想用窄概念来挽救"好"定理，从这个角度说，我又拒绝它。德尔塔方法的这两种功能应当分开来看。我的方法，其特征就在于只有头一种功能，我愿意命名为"例外除外法"。我要用这种方法确切规定欧拉猜想在哪个范围内成立。

教师：你许了愿要给欧拉多面体"确切规定的范围"是什么？你所谓"完善公式"是什么？

倍塔：对于所有无空穴(象套装立方体就是有空穴的)又无坑道(象画框就是有坑道的)的多面体，$V-E+F=2$。

教师：你有把握吗？

倍塔：没错，我有把握。

教师：孪生四面体是怎么回事？

倍塔：抱歉。对于所有无空穴又无坑道又无"重叠建筑物"的多面体，$V-E+F=2$。②

教师：明白了。我赞成你想改进猜想而不只是"非取即舍"的方针。我看这比怪物除外法和投降法都强点儿。然而，我有两点异议。第一，你自称你的方法不但改进还"完善"了猜想，"使它全然正确了"，"使不确实的成分统统绝迹了"，我坚信这话站不住脚。

倍塔：真的吗？

教师：你不能不承认，你的每一版新猜想都只是顾此失彼地消除一个才冒出来的反例。偶尔撞上套装立方体，你就排除掉有空穴的多面体。凑巧察觉画框，你就排除掉有坑道的多面体。你如此开明和警觉，我表示赞赏；能注意有这些例外自然好得很，不过，你找"例外"全凭瞎摸，我想，总还要讲究点方法才是上策。承认"所有多面体都是欧拉的"只是一个猜想，这好嘛。可是，为什么说"所有无空穴、无坑道、无这无那的多面体都是欧拉的"就有资格叫定理，丝毫猜的成分也没有了呢？你怎么会有把握说你枚举了一切例外呢？

倍塔：你能举一个我没顾到的例外吗？

阿尔发：我的海胆该怎么说呢？

伽马：还有我的柱子呢？

教师：我简直不必拿具体的新"例外"作论据。有再出例外的可能性，这就是我的论据。

倍塔：说不定还是你有道理。是不该每出一个新反例就立刻变一回立场；是不该说"如果大千世界里没出现例外，只管笼统地宣布结论。如果后来某时刻出现了某反例，不妨从此附上

① 摘自哥西名著[1821]的引言。

② 吕里埃和日果内似乎有把握说，吕里埃的清单把一切例外都枚举完了。在文章这一部分的引言里，我们读到："大家不难确信，除了我们要举出的特例之外，一般说来，欧拉定理对所有多面体都真，无论其是否凸的……"（吕里埃［1812—1813a］，第177页。）随后，在日果内加的评注里，我们又一次读到："……这里举出的例外似乎就是可能出现的全部例外……"（同上，第188页。）但是，事实上，孪生四面体就被吕里埃漏掉了，只是二十年后赫塞尔才注意到（［1832］）。值得注意的是，有一些居领导地位的数学家，甚至是象日果内那样对方法论怀有浓厚兴趣的数学家，居然会相信可以靠例外除外法行事。这种信念类似归纳逻辑中的"划分法"，据它说，能完全枚举出某现象可能有的解释，所以，只要能用判别实验方法排除其余一切，剩下的解释便得到证明了。

已出现的这类反例另行宣布结论。"① 让我想想。我们最初推测对于所有多面体$V-E+F=2$,只是因为发现了这对立方体、八面体、棱锥体和棱柱体是真的。"这种可怜的从特殊到一般的推论方式"②,的确不可取。出现例外不足为怪;奇怪的是,许许多多的例外没有更早发现。照我想,这是因为我们多半在跟凸多面体打交道。一当别的多面体进入视野,我们作的概括就再也不灵了。③ 既然如此,我不再逐一排除例外了,我要谨慎而安全地划条界线:所有凸多面体都是欧拉的。④ 但愿诸位会认可,这总没有猜的成分了,这总是定理了。

伽马:我的柱子是怎么回事呢?它是凸多面体嘛!

倍塔:它是闹着玩的嘛!

教师:暂且忘掉柱子吧。即使没有柱子,我们也不会一点

① 牛顿[1717],第380页。

② 阿贝尔[1826a]。他的批评似乎是针对欧拉的归纳主义。

③ 这也是套用方才引的那封信,阿贝尔在信中谈的是如何把有关函数的一般"定理"的例外消除掉,从而确保绝对严格。原文(包括前引一语)是这样的:"在高等分析里,很少有证明得完全严格的命题。到处都是那种可怜的从特殊到一般的推论方式,妙的是这种搞法只是偶尔才引起所谓的悖论。找找原因倒也实在有趣。据我所见,理由就在分析学家多半在跟能表示成幂级数的函数打交道。一当别的函数进入视野——确实是难得有的事——就再也混不下去了。而一当有假结论开始露头,就会有无穷尽的错误尾随而至,全都联成一气……"(重点是我加的。)庞索特也发现,在多面体理论中,正如在数论中一样,归纳概括"常常"垮台:"大多数的性质都是各适其例,全无一般规律可循"([1810],§45)。这种提防归纳的心理值得玩味的特征,在于把归纳不时垮台的原因归诸于(事实、数、多面体的)论域里当然有超乎意想的例外。

④ 这又是跟阿贝尔的方法如出一辙。阿贝尔就是以同样的手法把有关函数的可疑定理限制到幂级数的。在欧拉猜想的故事里,限制到凸多面体这一手曾经很流行。比方说,勒让德先给多面体下了相当一般的定义(参见第11页注①),然后又端出一个证明,一方面,这个证明决不适用于他的全部一般多面体,另一方面,却又不只是适用于凸多面体。可是,在精装本补注里,他还是谦逊而安全地撤到了凸多面体([1809],第161、164、228页)。莫非是事前曾经偶然碰上了他始终讳言的例外,才来了个事后聪明呢?

批评都提不出来的。倍塔为了回答我的批评，不费举手之劳就设计了例外除外法的这种经过修改的新款式，原先的节节后撤换成了战略退却，指望缩进某个地带之后猜想就有了一个可以固守的据点。这是为安全在孤注一掷。你又何尝象自己扬言的那样安全呢？你照旧保证不了据点里头不会再有任何例外。况且还有从反方向来的危险。你会不会撤得太猛，把成批的欧拉多面体给甩在城墙外头了？我们的原猜想说不定是过甚其辞，但我觉得你“完善了”的猜想又非常象是过谦其辞了；不过，你这个猜想会不会同时也是过甚其辞，你依然是毫无把握。

我还乐意摆摆我的第二点异议：你立论忘掉了证明，你揣摩猜想有效范围的时候似乎根本不需要证明。你决不至于相信证明是多此一举吧？

倍塔：我从来没说过那种话。

教师：不错，你是没说过。但是你发现过用我们的证明来证明原猜想是不行的。用那个证明来证明你改进过的这个猜想，行吗？告诉我。

倍塔：嗯……①

---

① 许多务实的数学家百思不得其解：证明如果不足为证，又为的是什么？他们一方面从经验得知证明或有一失，另一方面又由教条主义训诫获悉真正的证明必须万无一失。应用数学家解脱这种两难境地，照例是凭一种自惭形秽但坚贞不移的信仰：纯粹数学家的证明才“完备”，也才真正是在证明。然而，纯粹数学家更知情，所以又只对逻辑学家的“完备证明”怀有这样的敬意。假使问起他们的“不完备证明”有何用处、有何功能，大抵便都要茫然失措了。比方说，哈代在逻辑学家要求的形式证明面前毕恭毕敬，而当他想说明“咱们这些务实数学家所熟悉的”数学证明的特征时，他就来了这么一手：“严格说来，没有数学证明这种东西：分析到最后，除了指指点点，我们什么也不会干；……证明就是李托伍德和我叫做神吹的那套玩意儿，是编出来打动人心的花言巧语，是上课勾在黑板上的图画，是激发学生想象力的手法”（[1928]，第18页）。据怀尔德想，证明“只是我们用来检验自己直觉的启示的一种过程”（[1944]，第318页）。波亚则指出，证明纵然不完备，也建立了数学事实之间的联系，因而有助于记住事实，这就是说，证明产生一个记忆术系统（[1954]，第190—191页）。

艾塔：老师，谢谢您这番辩驳。倍塔方寸大乱，把他们中伤的怪物除外法的优越性衬托得很清楚了。因为我们说证明证的就是所求证者，这样的回答才不模棱两可。放任刚愎自用的反例来破坏可敬的证明，是我们不许可的，哪怕它们化装成了温文尔雅的"例外"也不许可。

倍塔：我对自己的方法论也要有了批评的刺激才好去琢磨、改进和——老师，请原谅我还是要说——完善，我看不出这算什么方寸大乱。下面是我的回答。我拒绝掉原猜想，把它看成假的，理由在于它有例外。我也拒绝掉原证明，理由在于这些例外同样也是至少一条引理的例外(用你的术语，这话该说成：全局反例必然也是局部反例)。阿尔发到此止步，因为他的求知欲似乎有了反驳就全部满足了。我要往前走。我把猜想和证明双双限制到那个正当范围，以此为度。这样我便一举两得，一则猜想完善了，就此真了；二则大体上原就是健全的证明也完善了，就此严格了，显然再也不含有假引理了。比方说，我们已经明白，移走一面之后放在平面上绷平，这不是对一切多面体都办得到，但是对一切凸多面体确实都办得到的。既然我的猜想得到完善和严格证明，我叫它定理总不会错了。我把定理再陈述一遍："所有凸多面体都是欧拉的"。原证明被你们强装了浮而不实的一般性才成了不严格的，在凸多面体这个有限范围之内总该严格了，要知道，就凸多面体而言，所有的引理明明都真啦。总之，老师，您的问题我已经答上来了。

教师：总之，发现例外之前一度好象是明明真的引理，又一度好象是明明真啦……直到发现下一个例外为止嘛。你承认，"所有多面体都是欧拉的"是推测；没多大功夫以前你还承认过，"所有无空穴又无坑道的多面体都是欧拉的"也是推测，何不再来一次，承认"所有凸多面体都是欧拉的"仍然是推测呢？

倍塔：这一回不是“推测”了，是顿悟！

教师：我不喜欢你这种自命不凡的“顿悟”。我敬重自觉的推测，因为它来自人类最优良的品德：勇敢和谦虚。

倍塔：我提出了一个定理：“所有凸多面体都是欧拉的”。您只端出了一套说教，训它一通罢了。现在该端出一个反例了，您可有法子做到？

教师：你可没法子知道我将来端不出。你是改进了原猜想，但是，你没法子断言你已经使猜想完善了，你的证明已经严格得无以复加了。

倍塔：您有法子？

教师：我也没法子。不过，我想，我改进猜想的方法可以改进你的方法，因为我要在证明与反例之间建立某种统一性、某种真正的相互制约。

倍塔：我乐于讨教。

(d) 怪物校正法

罗：老师，我插几句，行吗？

教师：自然行。

罗：我同意大家说的，作为一种总的方针，德尔塔的怪物除外理应拒绝，因为它对待“怪物”实在不郑重。倍塔对待他的“例外”也是不郑重的，因为他仅仅把例外罗列出来之后就撤入了一个安全地带。这两种方法都是只对某个有限的特惠区发生兴趣。我的方法才不搞厚此薄彼哩。我能够说明，“经过更仔细的审查，例外都成了表面的；即使对所谓的例外，欧拉定理也不失其有效性”。①

---

① 马梯森[1863]。

教师：真的吗？

阿尔发：我的反例3，也就是"海胆"(图7)，怎么会是普通的欧拉多面体呢？它有12个五角星面……

罗：我可看不出哪儿有什么五角星。实事求是，这个多面体的面是普通的三角形面，你看不出吗？这样的面有60个。它还有90个棱和32个顶点。它的"欧拉示性数"是2。① 12个"五角星面"啦，这些玩意儿上的30个"棱"啦，12个"顶点"啦，全都是你想入非非，不然决不会把"示性数"给搞成-6。不存在怪物，只存在怪解释。一定要洗净自己心中邪魔外道的幻觉，一定要学会怎么去看、怎么去确定你看见的东西。我的方法是治疗性的。你错误地"看见"一个反例，我教你就地正确地识别一个例子。我校正你的怪眼光……②

阿尔发：老师，趁罗还没给大伙儿洗脑筋，请先解释一下你的方法吧。③

---

① 欧拉定理万无一失的忠诚辩护士德荣奎埃提出过这个论据："海胆""其实"是普通的平庸的欧拉多面体——"不必加特征形容词的六十面体"(un hexacontaèdre sans épithète)——，有60个三角形面、90个棱和32个顶点。然而，把星状非欧拉多面体解释成三角形欧拉多面体这个主意倒不是德荣奎埃出的，而是另有一段戏剧性历史(参见本页注③)。

② 最能体现一种教条主义认识论的特征的，莫过于它的错误论。因为，如果说有些真理是明显的，那就必须解释怎么还会有人搞错，换言之，为什么这些真理不是对人人都明显。每一种教条主义认识论，都根据它特有的错误论，提出它特有的一套洗净心中错误的治疗术。参见波普尔[1963a]，导论。

③ 庞索特准是在1809到1858年之间的哪个时候洗过脑筋。正是庞索特重新发现了星状多面体，最先从欧拉性着眼加以分析，指出其中有些与欧拉公式不相符，如小星芒状十二面体([1810])。可是，这同一个庞索特在[1858]里却断然说，欧拉公式"不但对凸多面体真，对任何多面体都真，包括星状多面体在内"(第67页，庞索特是用超常多面体这个术语来指星状多面体)。矛盾显而易见。怎么解释呢？星状多面反例到哪儿去了？线索就在文章开头象是随口说说的那句话里："全部多面体理论可以还原为有三角形面的多面体的理论"。这就是说，阿尔发型庞索特洗了脑筋，转变成罗型庞索特了。在他以往看见星状多边形的地方，他如今只看得见

教师：让他说下去。

罗：我要说的都说了。

伽马：你能详细谈谈你对德尔塔的方法有何批评吗？你们俩都驱逐"怪物"……

罗：德尔塔被你的错觉骗了。他随声附和，说你的"海胆"有12个面、30个棱和12个顶点，是非欧拉的。他只好抱定他的论点，说"海胆"又该不是多面体。他两头都错了。你的"海胆"既是多面体又是欧拉的。它的星状多面解释是一种错误解释。你可别介意呀，这不是海胆在一颗健康的、纯正的心上的印象，而是它在一颗病态的、被狂念折磨着的心上的歪曲印象。④

卡帕：你是怎么把健康的心跟病态的心、合理解释跟怪解

三角形了：在他以往看见反例的地方，他如今只看得见例子了。自我批评必定是暗中秘密进行的，因为，按科学上的惯例，这样的大变卦，一五一十地招供是不成体统的。人们也很想知道，他碰到过环形面么？如果碰到过，他用他的三角形眼光处心积虑地重新解释过么？

眼光的改变不见得永远是沿同一个方向发生的。例如，贝克尔在[1869a]里——那时他迷上了单连通与多连通曲面这种新的概念框架（黎曼[1851]）——考虑到了环状多边形，而依然对星状多面体视而不见（第66页）。在这篇文章里他自称已经使问题得到了"最终的"解；五年之后，他却扩大了眼光，在以往只看见三角形和三角化多面体的地方又识别出星状多边形和星状多面体了。

④ 这是克里西普斯创立的斯多噶派错误论的一部分（参见埃修斯［约公元150］，IV．12.4；又见塞克斯都·恩披里可[约公元190]，I .249）。

照斯多噶派的看法，"海胆"是外间实在的一部分，在灵魂上造成印象：phantasia 或visum。一个 phantasia，除非已经成熟为清晰而分明的观念(phantasia katalēptikē或 comprehensio)，聪明人是不会无批判地附和的（synkatathesis 或 adsensus)；而如果它是假的，就不可能有这种事。科学(epistēmē) 正是由清晰而分明的观念的系统形成的。落实到我们的例子，"海胆"所造成的印象，在阿尔发的心上虽是小星芒状十二面体，在罗的心上却是三角化六十面体。罗必断言阿尔发的星状多面视象决不可能成熟为清晰而分明的观念，原因显而易见：这种视象会颠覆"已证"的欧拉公式。既然如此，星状多面解释只好败退，作为它的"唯一"竞选者的三角化解释就变成清晰而分明的观念了。

释分得开呢？①

罗：我百思不得其解的是，你倒是怎么把它们混得了！

西格马：罗，你真以为，阿尔发从未察觉他的“海胆”可能被人解释成三角化多面体么？当然可能喽。可是，再仔细瞧瞧，真相大白，原来“这些三角形总是五个一组躺在同一平面上，象围绕自己的心脏一样，围绕着一个躲在立体角背后的正五边形。于是乎，这五个正三角形就跟位于内心的正五边形合为一体，形成了所谓的‘五芒星形’，按德奥夫拉斯都的教导，这是健康的标志……”②

罗：迷信！

西格马：这样一来，在健康的心里，海胆的秘密便昭然若揭：它是一种过去做梦也不敢想的新正则物体，有正则的面和相等的立体角，它那美丽的对称性可以向我们宣示宇宙和谐的奥秘……③

阿尔发：谢谢你啦，西格马，多亏了你的辩护，我才再一次衷心信服，对手使人发窘的本事反不及盟友。我的多面图形，既能解释成三角化多面体，又能解释成星状多面体，这不用说。我情愿不偏不倚地承认两种解释……

卡帕：你会吗？

德尔塔：但是，其中必定只有一种是真解释啊！

阿尔发：我情愿不偏不倚地承认两种解释，但是，其中确实会有一种是欧拉猜想的全局反例。凭什么只承认按罗的先入之见“校正好了”的那种解释？不管怎么样，老师，现在总该解

---

① 斯多噶派自称他们能把 phantasia 跟 phantasia katalēptikē 分开，怀疑派以此作为标准的批评方法(例如塞克斯都·恩披里可[约公元190]，I. 405)。

② 开普勒[1619]，第II册，命题XXVI。

③ 这是在如实地讲解开普勒的观点。

释解释您的方法了吧？

(e) 用引理并入法来改进猜想．证明生成的定理与朴素猜想的对立

教师：我们来回顾一下画框。它是欧拉猜想的真正全局反例，也是我的证明中第一引理的真正局部反例，起码我是承认的。

伽马：恕我多嘴，老师，画框怎么驳得倒第一引理？

教师：先移走一面，再试试看把它放在黑板上绷平。你是不会如愿的。

阿尔发：为了便于您想象，我告诉您，凡是也只是能够吹胀成一只球的多面体有一种性质：移走一面之后，剩下的部分可以绷到平面上。

显而易见，这样的“球性”多面体，切掉一面之后，总是能放在平面上绷开的；反过来说，同样显而易见，如果减去了一面的多面体能放在平面上绷开，你也就能把它捏成一只圆滚滚的瓶子，然后把缺掉的一面盖好，得到一个球性多面体。可是，画框永远不能吹胀成一只球，只能吹胀成一只圆环。

教师：讲得好。我跟德尔塔不一样，我承认这个画框是对猜想的批评。所以，原来那种形式的猜想，我放弃了，把它看成假的。但是，我要立即摆出一个加了限制的修订版，不外是说：笛卡儿-欧拉猜想，对“简单的”多面体，也就是移走了一面之后能绷到平面上的多面体，仍是应验的。这就救活了原假说的一部分。我们有了：简单多面体的欧拉示性数是2。这个论点不致被套装立方体、孪生四面体或星状多面体否证掉了，因为它们都不是“简单的”。

可见，例外除外法是把主猜想和负罪引理的范围双双限制到某个共同的安全地带，因此承认了反例既是对猜想又是对证明的批评，我的引理并入法则是维持证明，只把主猜想的范围缩小到负罪引理本身的范围。换句话，一个全局兼局部反例引起的反响，在例外除外者那方面是又修正原猜想又修正引理，在我这方面则是只修正原猜想不修正引理。你们懂了吗？

阿尔发：是的，我想我懂了。为了让您明白我懂了，我要驳倒您。

教师：驳我的方法，还是驳我改进了的猜想？

阿尔发：驳您改进了的猜想。

教师：照这样看，你也许还是没有懂我的方法。就先让我们欣赏欣赏你的反例再说吧。

阿尔发：考虑一个立方体，有一个小点儿的立方体端坐在它的顶部(图12)。这玩意儿跟我们手头所有的定义1、2、3、4、4′、

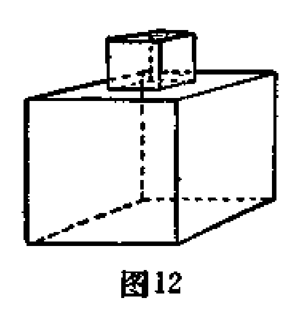


图12

5都相合，所以是真正的多面体。它能绷到平面上，所以它又是“简单的”。按您改了的猜想，它的欧拉示性数该是2。可是，它有16个顶点、24个棱和11个面，欧拉示性数成了16－24＋11＝3。它是您改进了的猜想的全局反例，顺便说说，也是倍塔头一个“例外除外”定理的全局反例。这个多面体，尽管无空穴、无坑道又无“重叠建筑物”，但不是欧拉的。

德尔塔：把这个饰顶立方体叫反例6吧。①

教师：你否证掉了我改进了的猜想，却没有破坏掉我改进的方法。我要重新审查证明，看看它为什么在你的多面体上栽了跟头。证明里必定还有别的假引理。

倍塔：当然有。我一直疑心第二引理。那条引理预先假定，在三角剖分的过程里，每画一个新的对角棱，总要使棱数和面数各增加一。这是假的。瞧瞧饰顶立方体的平面网络吧，在那儿会找到一个环形面(图13(a))。既然如此，只画一个对角棱是不会增加面数的（图13(b))。要使面数增加一，非添两个棱不可(图13(c))。

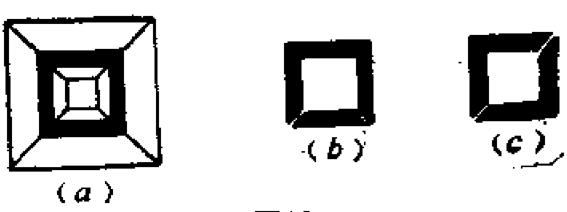


图13

教师：恭喜你说中了。我确实得给猜想再加上一层限制……

① 反例6是吕里埃注意到的([1812—1813a]，第186页)：日果内这一次承认他的发现新颖了！可是，过了五十年左右庞索特还没有听说过它([1858])，而马梯森([1863])乃至八十年后的德荣奎埃([1890b])还把它当成怪物。(参见第32页注③和第41页注①。)十九世纪的原始例外除外者把它跟别的例外并列为古董："人们照例出示的一例，是附在四面体一面上的三棱锥，后者无一棱与前者的棱相叠合。我在大学笔记本里写过：'够奇特的，这里有$V-E+F=3$'。写完了，事情也就告一段落"(马梯森[1863]，第449页)。现代数学家渐渐忘记还有环形面那回事了，也许是环形面跟流形分类没什么关系吧，但在别的问题上未尝不会有点关系。施坦豪斯在[1960]里说："让我们把地球分成F个国家(海和洋看成陆地)。于是，不论政治状况如何，总有$V+F=E+2$"(第273页)。人们倒很想知道，施坦豪斯会不会因为西柏林或圣马力诺的存在驳倒了欧拉定理，就干脆把它们一举消灭。(话虽如此，象贝加尔之类的海，他当然可以防止它们整个落在一个国家里，只要把它们都定义成湖就成了，要知道，他说过的，只有海和洋才该看成陆地。)

倍塔：我晓得您想怎么干。您是想说“有三角形面的简单多面体都是欧拉的”。您要承认多面体原已是三角化的；您要把这个引理又变成一个条件。

教师：不，你想错了。我过一会儿具体指出你错在哪里，先详细谈谈我对你的例外除外法的评论。当你把自己的猜想限制到“安全”地带的时候，你没有切切实实审查你的证明。老实说，你无需花这份力气也能达到你的目的。信口说一声不论哪条引理在你定的有限范围内统统都真，对你的目的来说也就够了。可是，对我的目的来说，这还不够。我要把被反例驳倒了的那条引理本身插进猜想。所以，我一定要作一番细心的证明分析，在这个基础上，把那条引理认出来，尽可能准确地表述出来。这样才好把被驳倒的那条引理并入我改进了的猜想之中。你的方法却不会强制你去苦心琢磨证明，因为，你改进了的猜想跟我的不一样，那里面并无证明出场。现在回头说说你刚才的意见。被环形面否证掉的引理并不如你所设想，并不是“所有的面都是三角形的”，而是“任何一面用一对角棱剖分之后都分成两块”。我正是要把这条引理变成一个条件。称满足它的面为“单连通的”，我就能给原猜想作第二次改进：“对于一个简单多面体，如果它所有的面都是单连通的，则$V-E+F=2$。”你仓促失言，原因是你的方法不教你作细心的证明分析。证明分析有时平淡无奇，但有时的确是很难的。

倍塔：我明白您的意思了。除了您的评论，我也想补充一点观感，算是我的自我批评。因为，据我看，这一举揭示了各种姿态的例外除外衔接成的一整个连续统。最糟的就是只把某些例外除外了事，瞧都不瞧证明。既然我们一手捧着证明，一手捧着例外，又岂有不神秘之理？在这类原始的例外除外者心中，证明和例外是在两间毫不通气的隔离室里过日子的。另一

些人也许会指出，证明只在有限范围内可行，自以为这就算驱散神秘气氛了。但是，他们给的"条件"仍然是外加于证明计谋之上的。① 较好的例外除外者匆匆忙忙瞟证明一眼，灵感一来就讲出决定安全地带的条件了，跟我刚才的做法一个样。最好的例外除外者是作一番细心的证明分析，在这个基础上很精细地描出禁区的界线。从这个角度看，您的方法其实只是例外除外法的一个极限情况……

唷塔：……它却展现了证明与反驳根本上的辩证统一性。

教师：但愿你们全都明白了，证明也许不成其为证明，即便如此，毕竟是在帮助我们改进猜想。② 例外除外者也改进，但改进是不依赖于证明的。我们的方法则是靠证明来改进。"发现逻辑"与"核正逻辑"(Logic of justification) 之间的这种内在统一性是引理并入法最最重要的方面。

倍塔：现在我自然懂得您那些莫名其妙的话了，就是说，您不因为一个猜想既"得证"又挨驳而大惊小怪，甚至假猜想您也情愿去"证明"。

卡帕(旁白)：其实是"证不明、改得勤"③，为什么要叫"证明"?

---

① "……吕里埃的研究报告由两个迥然不同的部分组成。在前一部分，作者提出了欧拉定理一种别出心裁的证明。在后一部分，他的目标是指出这个定理所遇到的例外。"(日果内给吕里埃文章写的编者评论，见于吕里埃 [1812—1813a]，第172页，重点是我加的。)

查哈里阿斯在 [1914—1931] 里不加批判地但是忠实地描述了这种分室隔离术："在十九世纪，几何学家除了寻找欧拉定理的新证明之外，也竭力确定它在某些情况下允许的例外。例如，庞索特叙述过这类例外。吕里埃和赫塞尔则试图给例外分类……"(第1052页。)

② 哈代、李托伍德、怀尔德和波亚似乎都忽略了这一点(见第29页注①)。

③ 原文improof 是一生造的双关语，若看成 im+proof，可解释为"不证明"，若看成动词improve 的名词化，又可解释为"改进"。译者造不出同样诙谐的汉语双关语。——译者

教师：提醒各位，情愿这么干的人寥寥无几。由于深受助探论教条的感染，大多数数学家没能力做到，对同一个猜想，证明与反驳同时并举。他们要么去证明，要么去反驳。假使猜想正好是他们自个儿的，要他们通过反驳去改进，那就格外没能力做到。他们老想不经反驳就使猜想得到改进；从不指靠减少虚假性，一味指靠单调增加真实性；他们要这样把知识的生长过程洗刷清白，仿佛它没受到过反例的惊扰。这或许就是最好的一种例外除外者那套方案的背景。这种人的头一手是"为安全而孤注一掷"，设计一个在"安全"地带可行的证明，二一手才是让证明经受一次周到的批判性考察，看看自己是不是把每一个生加的条件都用上了。如果不是的，他们便把过分谦逊的定理初版"强化"或"推广"，也就是列出证明所倚赖的引理，然后并入猜想。比方说吧，冒出一两个反例之后，这种人也许要先制订一个临时的例外除外定理："所有凸多面体都是欧拉的"，把不凸的特例留待日后画收(cura posterior)；下一步，他们才设计出哥西证明，这才发现证明里没有真正"用上"凸性，这才建立了我们的引理并入定理！① 他们的程序是把临时的例外除外跟嗣后的证明分析、引理并入结合在一起，从助探论上说，也没什么毛病。

倍塔：这种程序当然不是废止批评，只是把它推到幕后进行。他们不直接批评过甚其辞，而去批评过谦其辞。

教师：我很高兴，倍塔，我把你说服了。罗，德尔塔，你们对此作何感想呢？

---

① 这种标准模式本质上就是波亚和舍戈的经典著作[1927]第vii页上描述的模式："要仔细检查每一个证明，看看是不是真用上了所有的假定；要设法从较少的假定得出同一推断……一直到反例显出你已经到了各种可能性的边界线，否则不该满足。"

罗：起码我坚信“环形面”问题是个假问题。你们所谓的“饰顶立方体”本是两个立方体焊接为一。你们对它的面和棱是什么作了一种怪解释，才闹出了这么个问题。

教师：讲讲道理。

罗：“饰顶立方体”是彼此焊接在一起的两个立方体组成的多面体。您该同意吧？

教师：我无所谓。

罗：可是您把“焊接”给解释错了。“焊接”就是把小立方体底部正方形的各顶点与大立方体顶部正方形的对应顶点用棱连在一起，足见根本就没有什么“环形面”。

倍塔：环形面是有的！你说的剖分棱是没有的！

罗：剖分棱是隐蔽的，只有你那双没训练过的眼睛才看不见！①

倍塔：你指望大伙儿认真看待你的论据吗？难道我看见的东西是迷信，你的“隐蔽的”棱反而是现实吗？

---

① 德荣奎埃力主用隐蔽棱“焊接”两多面体的妙法（[1890b]，第171—172页）。他用怪物除外来反对空穴和坑道，而用怪物校正来反对饰顶立方体和星状多面体。用怪物校正保卫欧拉定理的元勋要算马梯森[1863]。他自始至终只用怪物校正。他得心应手地展示出隐蔽的棱和面，把一切非欧拉的东西都给解释掉了，包括有坑道和空穴的多面体在内。德荣奎埃的焊接是对环形面作彻底的三角剖分。马梯森却焊接得经济又经济：最少要多少棱才能把环形面剖成单连通的子面，他就画多少（图14）。

马梯森异常信赖他把革命反例转化为校正妥贴的资产阶级欧拉正例的方法。他自称“任何多面体都有法子分析成是对欧拉定理的证实……”。他历数浅薄的观察者指出的所谓例外，然后说道：“凡属这类情况，都能表明多面体有着隐蔽的棱和面，只要它们也算在内，那么，即使对这些似乎难驾驭的情况，定理$V-E+F=2$也照样不失其光彩。”

补画棱或面能使非欧拉多面体变换成欧拉的，这个想法倒也不是出自马梯森，而是出自赫塞尔。赫塞尔以三例为证，还都配有精美的图形（[1832]，第14—15页）。不过，他采用这种方法，可不是要“校正”例外，相反，倒是要“讲清楚有例外”，才提出了这些“能使欧拉定律生效的而又相当近似的多面体”。

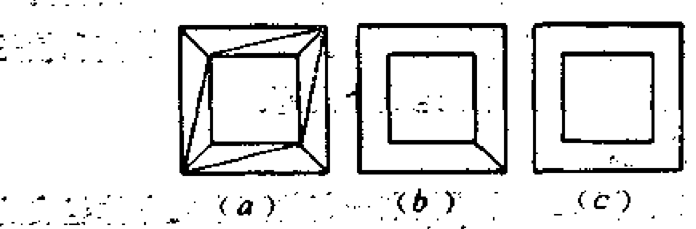


图14. 环形面三说：(*a*)德莱奎埃的，(*b*)马梯森的，(*c*)"没训练过的眼睛"的。

罗：瞧瞧这块盐的结晶体。你想必会说这是立方体吧？

倍塔：当然。

罗：立方体有12个棱，对不对？

倍塔：对，是有啊。

罗：但是，这个立方体上根本没有棱。棱都是隐蔽的。只是经过你的理性再造，棱才出现了。

倍塔：我要想想这个问题。有一件事总是清楚的。老师批评过我不该自夸我的方法能通达确实性，批评过我忘了证明。这些批评也适合你的"怪物校正"，丝毫不亚于我的"例外除外"。

教师：德尔塔，你怎么样？你想如何驱逐环形面？

德尔塔：我不想驱逐了。您说动了我，我也改宗您的方法了。我只有一事不明：您为什么忽略了第三引理，不把它搞稳当了，也合并进来呢？我来提第四种表述，但愿是最后一种啦："所有合乎下列条件的多面体都是欧拉的：(a) 是简单的；(b) 每个面都是单连通的；(c) 在绷开面后作三角剖分所得到的平面三角化网络里，可以给三角形编上号，按这种正确次序移走三角形时，$V-E+F$不会变，直到得出最末一个三角形为止。"①

① 最后这个引理强得无谓：换成"对于绷开而后作三角剖分所得到的平面三角化网络，$V-E+F=1$"，也足以达到哥西证明的目的了。哥西似乎没有察觉两者的差异。

我真不明白，您为什么不一举提出这种表述呢？假使您真正是郑重对待自己的方法的，您就会把所有的引理立刻变成条件。为什么要搞这种“零敲碎打的工程学”呢？①

阿尔发：托利党徒变成革命党人啦！你的主张，我深感近乎乌托邦。因为，引理决不止三条。譬如说“(d)1+1=2”，“(e)所有三角形都有三个顶点和三个棱”，还有许许多多别的条件，你为什么不统统补上呢？这些引理，我们不也的确用上了？我提个建议，只把已经找到反例的那些引理变成条件。

伽马：据我看，要是取你这一条作方法论上的规则，可就太没准儿了。还是把能料到有反例的，也就是并非显而易见、无可置疑的引理插进去吧。

德尔塔：对呀，难道有谁感到第三引理显而易见不成？还是把它变成第三个条件吧。

伽马：万一证明中各条引理所表示的手术不尽独立，该怎么说？很可能，只要某些手术行得通，其余的也必然行得通。起码我疑心，只要多面体是简单的，就永远有一种删去所得平网络中三角形的次序，使得$V-E+F$不会变。果真有的话，把第一引理并入猜想之后，就不必再把第三引理并入了。

德尔塔：你是说第一个条件蕴涵第三个。你能证明这一点吗？

易卜西隆：我能。②

阿尔发：不论实际的证明何等有趣，也无助于解决我们面临的问题：改进猜想什么时候才算到了头？我尽可承认你自称

① 学生们显然十分精通当代社会哲学。这个术语是波普尔造的（[1957]，第64页）。

② 实际上，这样的证明是赖哈特最先提出的（[1941]，第23页）。也参见范德瓦尔登[1941]。希尔伯特和康福森满足于“容易看出”伽马论断是真的（[1932]的英译本，第292页）。

到了手的证明确实到了手，但那也不过是把第三引理分解成若干新的子猜想而已。这些子猜想要再变成条件么？究竟何时罢休？

卡帕：证明里总有无穷回溯；所以，证明都不成其为证明。证明是一种游戏，兴致好就玩你的，玩腻了就罢休。

易卜西隆：不，证明不是游戏，是一件严肃的工作。平淡的真引理是无需乎变成条件的。一到那样的引理，无穷回溯就能够截住了。

伽马：正合我意。由平淡的真引理可证的引理，不用变成条件。由已列引理可证——可能要借助于平淡的真引理——的引理，也不用并入。

阿尔发：一言为定。那好，我们把两条不平淡的引理变成条件之后，改进猜想的活儿就大可洗手不干了。说实在的，这种靠引理并入来改进猜想的方法，我以为，简直是无懈可击。据我看，它不但改进了猜想，而且完善了猜想。我从中还学到一条重要的道理：说什么"'证明题'的目标是最终表明某一叙述清晰的论断是真的，否则就表明它是假的"①，这话错了。"证明题"的真正目标是把原来的"朴素"猜想改进——说实在的，是完善——成一个名副其实的"定理"。

我们的朴素猜想本是"所有多面体都是欧拉的"。

怪物除外法保卫这个朴素猜想的办法是重新解释其中的术语，弄得大家到头来还是只有一个怪物除外定理："所有多面体都是欧拉的"。但朴素猜想与怪物除外定理的字句相同却隐藏着某种本质上的改进，靠偷换词义瞒住了。

例外除外法塞进了一种其实是外加于论据之上的成分，就

① 波亚([1945]，第142页)。

是凸性。例外除外定理成了："所有凸多面体都是欧拉的"。

引理并入法倚赖论据，倚赖证明，而不倚赖别的。说穿了，它是把证明总结起来，放进了引理并入定理："所有带单连通面的简单多面体都是欧拉的"。

这说明了——现在我按传统涵义来使用"证明"这个术语——谁也不是在证其所求证者。所以，没有一个证明能以"证毕"(Quod erat demonstrandum)的字样结尾。①

倍塔：有的人说，按发现的次序，定理先于证明，因为，"证明一个数学定理之前，你得先猜到它才行"。别的人否认这种看法，声称发现过程是从一组预定前提引出结论，并且注意有趣的结论，假使你有足够好的运气找到的话。或者用我朋友打的一个挺讨人欢喜的比喻，有的人说助探论的"拉链"是按演绎结构从底端(结论)往上拉到顶端(前提)②，别的人却说它是从顶端往下拉到底端。你的见解是什么？

阿尔发：是你的比喻对助探论不适用。发现既不是往上，又不是往下，而是走一条弯弯曲曲的路：被反例激活，从朴素猜想移到前提，然后又反转来勾销朴素猜想，用定理取而代之。朴素猜想和反例在羽毛丰满的演绎结构中不复可见，发现走过的弯路在成品里无从辨认。

教师：说得很好。但是，不妨补充一句，谨防误会。定理并不是永远不同于朴素猜想。证明并不是必然在改进。如果朴素猜想有些方面是证明计谋发现者始料所不及，是随后才在定理中出现的，那么，证明是在改进。而在成熟的理论中未必如此。当然，在年轻的正在生长的理论中确是如此。发现与核正、

① 最后这句话出自安布罗斯的趣文([1959]，第438页)。

② 参见第5页注①。"拉链"的比喻是布雷思韦特发明的；然而，他只谈到"逻辑的"和"认识论的"拉链，没谈到"助探论的"拉链([1953]，尤其是第352页)。

证明与改进相互交织，首先是后面这种理论的特征。

卡帕(旁白)：成熟的理论可能返老还童。发现永远要使核正报废。

西格马：这种分类跟我的分类不谋而合呢！我的第一类命题就是成熟型的，我的第三类就是生长型的……

伽马(打断他)：定理还是假的！我找到它的反例了。

5. 用全局而非局部反例来批评证明分析。严格性问题

(a) 保卫定理的怪物除外

伽马：我刚才发现，我的反例5，也就是柱子，非但驳倒了朴素猜想，还驳倒了定理。虽然两条引理它都满足，它并不是欧拉的。

阿尔发：亲爱的伽马，别变成怪癖狂了。柱子是闹着玩的，不是什么反例。没有哪个严肃的数学家会把柱子当成多面体。

伽马：我的反例3，海胆，你何以不提抗议？难道它不及柱子"怪僻"？当然喽，当时你是在批评朴素猜想，所以你欢迎反驳。现在你是在保卫定理，所以你憎恶反驳啦！当时，每出一个反例，你总问：猜想错在哪里？现在，你只问：反例错在哪里？

德尔塔：阿尔发，你已经变成怪物除外者啦！不觉得难堪么？①

① 保卫定理的怪物除外是非形式数学里的重要模式："挫败欧拉公式的例子错在哪里？为确保欧拉公式有效，要用哪些几何条件更确切地规定 F、V、E 的意义?"(波亚[1954]，I，习题29。)柱子是在习题24里举的例。答案是"棱……应当终止于角落"(第225页)。波亚还把这话推而广之："数学研究中不乏这种局面：定理业已定型，却还得给术语更确切的意义才能使它完全对头"(第55页)。

(b) 隐蔽引理

阿尔发：觉得。也许我是轻率了点儿。让我想想。有三类可能的反例。我们早已讨论过第一类，局部而非全局反例，它们肯定驳不倒定理。第二类，全局兼局部反例，也没什么大不了的，因为，它们远不是在反驳定理，是在证实定理。再往下，说不定还有第三类，全局而非局部反例。这就会驳倒定理了。我一向认为这是不可能的。现在，伽马说，柱子便是一例。假使我们不想把它当怪物拒绝掉，我们就不得不承认它是个全局反例了，$V-E+F=1$嘛。可是，难道它不会属于无害的第二类？我敢打赌，至少有一条引理是它满足不了的。

伽马：你我来核查一下吧。第一引理，它肯定满足：如果我移走底面，我能把剩下的部分放在黑板上绷开，轻而易举。

阿尔发：如果你移走的凑巧是套圈呢，这玩意儿岂不分成两块了！

伽马：那又怎么样呢？第一引理要求多面体是"简单的"，就是说，"移走了一面之后，能放在平面上绷开"。即使你先移的是套圈，柱子照样满足这个要求。你的话无异于说柱子还该满足一条补充引理，即所得到的平面网络也是连通的。不过，这条引理又有谁陈述过呢？

阿尔发：人人都是把"绷开"解释成"绷成一块"、"绷开而不撕破"……过去我们所以不把第三引理并入定理，是因为易卜西隆证明了它能从第一引理推出。瞧瞧那个证明。一眼就能看出，它离不了绷开的结果是连通网络的假定！要不然，对于作了三角剖分的网络，$V-E+F$也不会是1。

伽马：当时你干吗不坚持把它公开陈述出来？

阿尔发：因为大伙儿都当它是隐约陈述了的。

伽马：起码你决不是这么看的。因为，你当时建议，用"简单的"代表"能吹胀成一只球的"。柱子能吹胀成一只球。足见，按你的解释，它的确符合第一引理。

阿尔发：嗯……但它不满足第二引理，也就是"任何一面用一对角线剖分之后都分成两块"。这你就非同意不可了。你有何妙法给圆或套圈作三角剖分？这些面会是单连通的？

伽马：当然是的。

阿尔发：可是，柱子上根本就不可能画对角线呀！对角线是连接两个不相邻顶点的棱。而你的柱子一个顶点都没有！

伽马：别胡搅蛮缠。要是你想说明圆不是单连通的，就画一条不产生新面的对角线给人看看。

阿尔发：别装疯卖傻；你明明知道我画不出来。

伽马：那么，你承认"圆有一对角线，这条线不产生新面"是假话吧？

阿尔发：不错，我承认。现在看你还有什么话说？

伽马：那么，你就有义务承认它的否定是真的，就是说，"圆的所有对角线都产生新面"，换言之，"圆是单连通的"。

阿尔发：你这条引理"圆的所有对角线都产生新面"，一个实例也举不出来，所以，它不是真的，而是无意义的。你的真理观是假的。

卡帕(旁白)：起初他们大争什么是多面体，如今又大争什么是真理！①

伽马：可是你已经承认过这条引理的否定是假的啦！难道会命题A是无意义的，非A倒是有意义的和假的？你的意义观

① 伽马的空洞的真话是十九世纪的一大革新。提出这个问题的背景至今庸细不明。

无意义！

提醒你，我明白你卡在哪儿了；不过，我们可以稍微改一改表述，把它绕过去。我们不妨说，一个面是单连通的，当且仅当，“对于所有 x， 如果 x 是对角线，则 x 把该面一切为二”。圆和套圈都不会有对角线，可见，对它们而言，不论x是什么，前件永远是假的。所以，条件句被任何对象所印证，既是有意义的又是真的。换言之，圆和套圈都是单连通的，柱子满足第二引理。

阿尔发：不对！既然你画不出对角线来给各面作三角剖分，你就始终得不到三角化平网络，始终结束不了证明。那么，你怎么能说柱子满足第二引理？你看不出那条引理中必须有一个存在子句？面的单连通性的正确解释必须是这样的：“对于所有 x，如果 x 是对角线，则 x 把该面一切为二；并且，至少有一个 x 是对角线”。我们原来的表述也许是没有把它一板一眼讲出来，但作为一个无意识作出的“隐蔽假定”①，它是有的。柱子的每一面都跟它不合；所以，柱子是全局兼局部反例，驳不倒定理。

伽马：起初你塞进“连通性”，改掉了绷开引理；如今又塞进你的存在子句，改掉了三角剖分引理！什么“隐蔽假定”，全是遁辞，只不过要隐蔽一个事实：你发明这些修改方案是我的柱子逼出来的。

阿尔发：何尝有什么遁辞？你我早有协议，平淡的真引理应当省去，也就是说，应当“隐蔽”。那又为什么要陈述和并入平淡的假引理呢？它们同样的平淡，同样的令人厌烦！还是把

① “欧几里得……用了一条他全然没意识到的公理”（罗素［1903］，第407页）。“作(sic)隐蔽假定”是数学家和科学家的口头语。也见伽莫夫对哥西证明的讨论（［1953］，第56页），或见伊夫斯和纽森姆论欧几里得一书（［1958］，第84页）。

它闷在你心里(en thyme)不声张为好。隐蔽引理不是错误，倒是以精明的速记略而不谈我们的背景知识。

卡帕(旁白)：背景知识的住地就是我们自命无所不知、实则一无所知的领域。①

伽马：要是你当初有意识，你该作两个假定：(a)移走一面之后永远留下一个连通网络，(b)任何非三角形面都能用对角线剖分成三角形。这些假定当初搭在你的潜意识里的时候，老是被列为真得平淡的引理。然而，柱子叫它们翻了个觔斗进入你的意识，你才把它们列为假得平淡的引理了。你跟柱子迎面相撞之前，简直无法设想这两条引理竟然会假。如果现在你说你想到过，你就是在改写历史，洗刷它犯过的错误。②

帖塔：阿尔发，不久以前，你还嘲笑过每次挨驳之后从德

---

① 非形式数学的好教科书照例点出了它们的"速记"项目，也就是它们认为平淡得不值一提的那些或真或假的引理。标准的措辞是："我们假定读者熟悉x型引理"。随着批评使背景知识转化为知识，假定别人熟悉的分量日趋减少。例如，哥西竟然未察觉他的名著[1821]预设了读者"熟悉"实数理论。任何反例，只要会把有关无理数性质的引理挑明，他都会当怪物拒绝的。魏尔斯特拉斯及其学派不复如此，所以，现在非形式数学教科书沥辟了一章讲实数理论，其中搜罗了这些引理。但那些书的引言里又照例假定读者"熟悉有理数理论"。(例如，见哈代《纯粹数学》，第2版(1914)及以后各版。初版依然把实数理论赶进了背景知识；或见鲁丁[1953]。)更严格的教科书定的背景知识还要窄。兰道在其名著[1930]引言里假定读者只熟悉"逻辑推理和德语"。就在同一时间，塔尔斯基偏偏表明了，兰道一语略尽的那些绝对平淡的引理，非但可以假，还不一致哩，因为德语是一种语义上封闭的语言。这才叫人啼笑皆非。人们很想知道，究竟要到哪一天"作者承认自己对x领域无知"才会取代一副权威气派的婉辞"作者假定人人熟悉x领域"——不言而喻，只有到承认知识并无基础的那一天才行。

② 只要是初次发现，隐蔽引理还是被目为错误的。当贝克尔初次指出哥西证明中的一个"隐蔽"(stillschweigend)假定的时候(他引用的是巴采尔[1862]的第二手证明)，他把它叫做"错误"([1869a]，第67—68页)。他提请大家注意，哥西认为所有多面体都是简单的，就是说，哥西的引理不只是隐蔽的，还是假的。然而，历史学家无法想象伟大的数学家会犯这样的错误。在庞卡勒[1908]里可以找到一个于

尔塔的定理里冒出来的"隐蔽"子句。如今，正是你每次挨驳之后就在引理里造出"隐蔽"子句，正是你在转移基地，还想保全面子隐蔽你的转移。你不觉得难堪么？

卡帕：本人引以为快的莫过于教条主义者身陷绝境。自阿尔发披上好斗的怀疑派的外衣去摧毁小号教条主义之后，他变得狂妄极了，此时此刻，反而轮到他被同一类怀疑主义论据逼进了死角。如今他出尔反尔，想击退伽马的反例，先动用他自己揭露过禁止过的防卫装置(怪物除外)，随后又偷运后备军，把"隐蔽引理"塞进证明，把相应的"隐蔽条件"塞进定理。他跟别人不同在哪里？

教师：阿尔发出了麻烦确实是因为他解释引理并入时转向了教条主义。他以为，细心检查证明会得出完善的证明分析，

真万确的如何伪造历史的规划："不严格的证明什么都不是。我看没有谁会抗拒这个真理的。但是，假使看得太死板，我们势必要得出结论，例如说1820年以前没有数学。这明明是夸大其辞。那时的几何学家是马马虎虎理解我们要长篇大论才说得清的道理。这不等于他们根本不懂，只能说他们太神速地掠过去了，因为，要懂透是一定得不辞饶舌之苦的"(第374页)。贝克尔谈哥西"错误"的那份报告非"1984式地"改写不可："涉不错语倍加不好全面式地改写"。②施坦尼茨干过改写工作，他坚持"决不可能始终无人察觉欧拉定理不是普遍有效的"([1914—1931]，第20页)。庞卡勒本人也把他的规划应用于欧拉定理："大家知道，欧拉证明了，对于凸多体面$V-E+F=2$"([1893])。事实上，欧拉当然是对所有多面体陈述他的定理的。

② 看了这句"人工的自然汉语"，读者不必惊诧。原文"doubleplusungood refs unerrors rewrite fullwise"本来就不是英国话，而是英国作家乔治·奥韦尔(George Orwell，1903—1950)在小说《1984》里给一个极权主义乌托邦"大洋国"(Oceania)设计的官方语言，叫"新话"(Newspeak)，更确切地说，是"新话"的1984年款式。"新话"以表达绝对纯正的思想为目标，因此最注重遣词造句方式的规范化。按它的语法规则，词类的分别几乎不存在；任何词添上前缀un后形成反义词，完全取代了习用的反义词；要加强语气便总是添上前缀plus，还要加强则添上doubleplus；造副词的办法永远是添上后缀wise；诸如此类。根据这些规则，译者揣测(只好揣测，因为无缘去"大洋国"一游)，这句怪话大致可依"老话"理解为：(贝克尔的报告)提到了真话，非常非常糟糕，要彻底改写！——译者

收罗了一切假引理(跟倍塔以为他能枚举一切例外毫无二致)。他以为，这些引理并入之后，他不但能达到改进了的定理，还能达到完善了的定理，不用再担心出反例。柱子说明他错了，他不认账。相反，照他现在的心愿，一个证明分析，只要含有一切相干的假引理，就该叫做完备的。

(c) 一证多驳法

伽马：我建议承认柱子是定理的真正反例。我来发明一个(或一些)会被它驳倒的引理，添到原来的清单里去。当然喽，这恰好就是阿尔发做过的事。但是，我不是把它们"隐蔽"起来，将它们变成"隐蔽"引理，而要公诸于众。

相对于老证明分析和对应的老定理，柱子是一个费解的、危险的全局而非局部反例(第三类)，现在，相对于新证明分析和对应的新定理，它会成为无害的全局兼局部反例(第二类)。

阿尔发以为，他的反例分类是绝对的，事实上它是相对于证明分析的。证明分析生长了，第三类反例会随之转化为第二类反例。

兰勃达：说得对。一个证明分析是"严格的"或"贴切的"，对应的数学定理是真的，当且仅当，不存在该定理的"第三类"反例。这条准则，我要称之为虚假性反传导原理，因为，它要求全局反例也得是局部的，就是说，虚假性应当从朴素猜想反传到引理，从定理的后件反传到前件。如果有一个全局而非局部反例破坏了这条原理，我们就给证明分析添上适当的引理，使它复原。所以，虚假性反传导原理是处于发生态的证明分析的调节原理，全局而非局部反例是证明分析生长中的触发剂。

伽马：回想一下吧，哪怕一个反驳还没找到的时候，我们

就先动手挑出了三条可疑引理，搞起证明分析来啦！

兰勃达：这是实话。证明分析不仅可以在全局反例的压力之下开始，当人们学会了戒备“令人折服”的证明时也可以开始。①

在前一种情况下，一切全局反例都是以第三类反例的身分出现，一切引理都是以“隐蔽引理”的身分开始自己的生涯的。这类反例指引我们逐步建造证明分析，自己也就一个一个变成了第二类反例。

在后一种情况下，由于我们事先处于怀疑状态，顾忌到了反驳，可以不靠任何反例便得出一个高明的证明分析。届时有两种可能。第一种可能是我们用局部反例成功地驳倒了列入证明分析的引理。我们往往有缘发觉这些反例也是全局反例。

阿尔发：我正是这样发现了画框的：我先去找一个多面体，指望它移走一面之后还是不能放在平面上绷平。

西格马：照这么说，不仅反驳对证明分析起触发剂的作用，证明分析对反驳也可以起触发剂的作用！好一个不神圣同盟，貌似仇敌的倒在暗中携手！

兰勃达：说得对。即使一个猜想看来很合乎情理，甚至是自明的，也应当去证明一下。因为，这样也许会觉察它是仰仗很牵强附会、很成疑问的引理。反驳这些引理也许会引出对原猜想的某种意想不到的反驳。

西格马：证明生成的反驳！

伽马：如此看来，“逻辑证明的价值不在于强立信念，倒在

---

① 这个班水平相当高。还没有出全局反例，阿尔发、倍塔和伽马就对三条引理起了疑心。在实际的历史中，证明分析过了好几十年才来。很长一个时期，反例不是被当成怪物隐瞒起来或驱逐出去，就是被列为例外。从全局反例转向证明分析这个助探进程——虚假性反传导原理的应用——在十九世纪初期非形式数学里实际上是不为人知的。

于诱发怀疑”。①

兰勃达：还是让我回过头来谈谈第二种可能：我们没有找到可疑引理的任何局部反例。

西格马：就是说，反驳不来助证明分析一臂之力了！那时候会怎么样？

兰勃达：咱们这号人会给烙上金印，判为“怪癖狂”。证明会博得绝对的尊仰，引理会不容起疑心。原来的证明分析会立刻被遗忘。② 不靠反驳，一个人是无法维持他的疑心的。证明中的疏漏在“平淡真理”的昏光中几乎无法识别；没有反例来把反驳的亮光引向这些疏漏，疑心的探照灯光会失去增援，会立刻熄灭。

所有这些都告诉我们，不能把一个证明与多种反驳搁在不

---

① 福德尔[1927]，第viii页。或者说：“证明的一大功绩是慢慢灌输了对于被证明结果的某种怀疑主义。”（罗素[1903]，第360页。他还举了一个绝妙的例子。）

② 好多人知道，批评可以使“先验真理”被怀疑所笼罩，乃至最后被驳倒，从而使证明沦为单纯的解释。至于缺乏批评或反驳也可以使不合情理的猜想转化成“先验真理”，从而使暂用的解释僭居证明，这就不大有人知道了，但是同样重要。欧几里得和牛顿的兴衰便是这种演变模式的两大事例。衰落的历程众人皆知，兴起的历程照例是讲错了。

欧几里得几何似乎是作为一种宇宙论提出来的(参见波普尔[1952]，第187—189页)。它的“公设”和“公理”(或称“公论”)当初也曾是锋芒毕露、咄咄逼人的命题，在向巴门尼德和芝诺宣战——根据他们的学说，这些“公设”不单是假的，甚至还是逻辑上假的，不可思议的。事过多时，“公设”才被奉为真得无可怀疑，锋芒毕露的反巴门尼德“公理”(如象“整体大于部分”)才被视为平淡无奇，以致日后的证明分析中略去不提，转化成了“隐蔽引理”。这个过程始于亚里士多德，他给芝诺烙上金印，称芝诺为“好辩的怪癖狂”，称芝诺的论证为“诡辩”。萨博最近披露了这一历程，具体入微，读来精神一振([1960]，第65—84页)。萨博表明，在欧几里得时代，“公理”一如“公设”，是指交互批评的对话 (dialectic) 中虚设的命题，要由推断来检验，并不是已被讨论参加者承认为真的。这个词的意思刚好倒了个儿，真是对历史的讽刺。欧几里得的权威在启蒙时期达到了顶峰。据克莱洛说，欧几里得所以陈述明显的引理，不过是要叫“顽冥不化的诡辩家”服气。他敦促同

通气的隔离室里。正因为如此，我想建议给“引理并入法”改个名字，叫它“一证多驳法”。我且用三条助探规则来陈述它的要领：

规则1，如果你有一个猜想，就下功夫证明它并且反驳它。细心检查一下证明，开一份不平淡引理的清单(证明分析)；找出猜想的反例(全局反例)和可疑引理的反例(局部反例)。

规则2，如果你有一个全局反例，就放弃你的猜想，给你的证明分析添上一条会被反例驳倒的适当的引理，把放弃掉的猜想换成一个改进了的猜想，将添上的引理作为条件并入其中。③不准把反驳当怪物打发掉。④设法把一切“隐蔽引理”都公开。⑤

规则3，如果你有一个局部反例，就检查一下，看看它会不会也是全局反例。果真是的，你不难再应用规则2。

行们别这么干，免得“模糊了证明，搞烦了读者”([1741],第x页和 第xi页)。

牛顿的力学和引力论也是作为大胆的推测提出来的。莱布尼茨讥评屡出，呼之为“玄学”，连牛顿自己也疑虑重重。可是，由于没有反驳，仅仅几十年之后，他的公理就被奉为真得无可怀疑了。疑点被遗忘了，批评被烙上了金印，不叫“蒙昧”，也要叫“偏执”：他的某些最可疑的假定被目为平淡无奇，以致教科书从此绝口不提。从康德到庞卡勒，谁也不再争论牛顿理论的真实性，只争论其确实性的本质。(波普尔最先指出牛顿理论的鉴定问题起了这样的骤变，散见于[1963a]各处。)

政治意识形态与科学理论有超乎常人理解的深远的类似之处。起初大可争论的(或者只是强迫人接受的)政治意识形态，哪怕一代的时间，就可以变成不许提问的背景知识。批评者被遗忘了(或者被处决了)，直至一次革命来临，他们的异见才得到昭雪。

③ 这条规则似乎是由赛德尔第一次陈述的([1847]，第383页)。见附录1第4节。

④ “任何一个满足你的论据的例子，我都有权提。你所谓光怪陆离、颠倒错乱的例子，我强烈怀疑其实正是一些令人难堪的例子，于你的定理大为不利”(达尔布[1874b])。

⑤ “我让隐蔽引理的贮藏量吓了一跳，还要做大量工作才能从中脱身”(达尔布[1883])。

(d) 证明与证明分析的对立．定理概念和证明分析严格性概念的相对化

阿尔发：你的规则2里，“适当的”是什么意思？

伽马：这个词儿纯属多余。任何被有关反例驳倒了的引理都能添上，因为任何这样的引理都会使证明分析恢复其贴切的原状。

兰勃达：什么！如此说来，为了对付柱子，象“所有多面体至少有17个棱”这条引理也该来插一手喽！这种随手拈来的顾此失彼的猜想还有的是，只要凑巧有反例驳得倒，就都该一视同仁吧。

伽马：有何不可呢？

兰勃达：我们早已批评过怪物除外者和例外除外者忘掉了证明。你这会儿干的是同样的名堂，想发明一种地地道道的怪物：不顾证明的证明分析。要说你跟怪物除外者还有差别，也仅仅在于你会叫德尔塔把他那些任意的定义都公开，列为引理，并入定理。至于你的证明分析跟例外除外么，那就毫无差别了。抵制这类顾此失彼的方法，唯一可行的安全措施是采用适当的引理，也就是与思想实验的精神相符的引理！莫非你想让数学失去它的证明之美，代之以愚蠢的形式游戏？

伽马：总比你的“思想实验的精神”强吧！我是在保卫数学的客观性，抵制你的心理主义。

阿尔发：谢谢你，兰勃达，你是在重申我的立场。据我看，善于处理全局而非局部的反例的人，决不凭空发明引理，而是细心备至地检查证明，就地发现引理。所以，亲爱的帖塔，不是我“造出”隐蔽引理的，亲爱的卡帕，也不是我把它们“偷运”

到证明里去的。这一切本来就在证明里，只不过一位成熟的数学家有一份短短的提纲就领悟到整个证明了。证明万无一失，证明分析永不精确，二者不可混为一谈。驳不倒的大定理依然健在："所有能做通哥西思想实验的多面体，简言之，所有哥西多面体，都是欧拉的。"我的近似的证明分析给哥西多面体画了一条界线，我承认，用的是一支不特别尖的铅笔。这会儿偏执的反例跑来教训咱们要把铅笔削得尖尖的。但是，第一，没有一支铅笔是绝对尖的(要是削得太尖，还会断)，第二，削铅笔可算不上创造性的数学活动。

伽马：我给搞得晕头转向了。你的立场到底是什么？最初你曾经是个反驳拥护者哩。

阿尔发：哦，那是老天爷在折磨我，非如此不足成正果！成熟的直觉把争论一扫而空了。

伽马：你最初那个成熟的直觉曾经领着你去信奉你的"完善的证明分析"哩。你曾经认为你的铅笔绝对尖哩。

阿尔发：我曾经忘记了语言交际的困难，尤其是跟迂夫子和怀疑派交际。数学的心脏终究是思想实验，是证明。让它发出语音的证明分析，对交际虽不可少，毕竟无关紧要。我迷的是多面体，你迷的是语言。你就看不出你那些反例乏得可以吗？它们该归入语言学，不归入多面体。

伽马：照这么说，反驳一个定理倒只是暴露自己无能，把握不了其中的隐蔽引理吗？所以，除非我们领悟了它的证明，否则一个"定理"就算无意义吗？

阿尔发：语言总是含混的，这就使证明分析的严格性到不了手，因而使定理形成变成了一个无休止的过程。既然如此，何必还为定理操心呢？务实的数学家才不操心哩。即使又炮制出了别的小小"反例"，他们也不承认自己的定理被驳倒了，至

多承认它的"有效范围"应该适当变窄。

兰勃达：总之，无论是反例，还是证明分析，还是引理并入，你如今都不感兴趣了？

阿尔发：正是。你的全部规则，我都要拒绝。我建议改用单独一条规则行事：构造严格的(清澈如晶的)证明。

兰勃达：你论定证明分析的严格性到不了手。证明的严格性就到得了手么？"清澈如晶"的思想实验就不会导致悖理的乃至矛盾的结果么？

阿尔发：语言是含混的，思想却能做到绝对的严格。

兰勃达：可是，其实"在每一个进化阶段上，我们的先师不也是自以为做到了吗？如果说他们是自己哄自己，我们就不会同样是自己骗自己吗？"①

阿尔发："今天，绝对的严格性到手了。"②

(教室里一片嗤嗤的笑声。③)

伽马：你鼓吹"清澈如晶"的证明的这套理论，堪称纯净之极的心理主义！④

---

① 庞卡勒[1905]，第214页。

② 同上，第216页。"证明严格性"准则一变再变酿成了几次大的数学革命。毕达哥拉斯派力主严格的证明必须是算术的。然而，他们发现了$\sqrt{2}$是"无理数"也有严格证明。当这桩丑事终于露了底之后，准则变了：算术"直觉"名誉扫地，几何直觉代之而起。这造成数学知识的一次大规模的复杂的改组(例如比例论)。十八世纪，"误人"的图形搞得几何证明声名狼藉。十九世纪，众目睽睽之下，算术直觉得臃肿的实数理论之助夺回了王位。今天，关于蔡梅洛和干岑的思想实验能否容许的著名讨论表明，主要争论是在集合论和元数学里什么算、什么不算严格的证明。

③ 前文早已指出，这个班水平很高。

④ "心理主义"是胡塞尔造的术语([1900])。对心理主义早有"批评"，见弗雷格[1893]第xv—xvi页。现代直觉主义(不象阿尔发)公开拥抱心理主义："数学定理表达着一个纯经验的事实，即某一构造成功了……数学……是研究人心的特定功能的"(海丁[1956]，第8页和第10页)。至于他们如何使心理主义与确实性相安无事，他们严守秘密。

阿尔发：总比你的证明分析那套逻辑学-语言学臭规矩强吧！①

兰勃达：别骂人。你说数学是"一种本质上不用语言的内心活动"②，这种见解，我也有怀疑。活动怎么谈得上有真有假呢？只有发了音的思想才有求索真理的能力。光有证明不会就够了，还得说出证明所证的是什么。证明不过是数学家工作的一个阶段，必须继以证明分析和反驳，终于严格的定理。我们一定得把"证明的严格性"跟"证明分析的严格性"结为一体才行。

阿尔发：你还在指望最后总会达到一个严格得无以复加的证明分析吗？如果是的，请告诉我，为什么你不先开个头，把柱子"刺激"出来的那个新定理表述出来？你光是空说它有。它准是长得要死、笨得要命，让大伙儿失望得忍俊不禁。这还仅仅是你碰到的头一个新反例哩。你要把我们的原猜想换成一连串一个比一个准确的定理，但只是在理论上。这种相对化付诸实践，又会是怎么回事呢？一个比一个偏执的反例由一个比一个平淡的引理来还击，结果是一个比一个长而笨的定理③形成

---

① 即便有完善知识也无法让它完善地发音，这对古代怀疑派本是老生常谈（见塞克斯都·恩披里可[约190]，I. 83—88），在启蒙时期被遗忘了。直觉主义者重新发现了它。他们接受康德的数理哲学，但指出"数学自身的完善与数学语言的完善之间看不出有清楚的联系"（布劳维[1952]，第140页）。"口语或文字，对交际虽不可少，但从不会恰好达意……科学的任务不是研究语言，是创造观念"（海丁[1939]，第74—75页）。

② 布劳维[1952]，第141页。

③ 数学家避免拉长定理的手法照例是改而拉长定义，使定理中只有被定义项（例如"普通多面体"）出现。这比较经济，因为一个定义缩写了好多定理。即使如此，按"严格的"讲解法，虽极少提及引出定义的怪物，定义也占了庞大的篇幅。在福德尔[1927]中（第67页和第29页），"欧拉多面体"的定义（连同某些定义项的定义）约占25行；在大英百科全书1962年版中，"普通多面体"的定义满满填了45行。

“恶的无穷”。① 当批评似乎通向真理的时候，还让人觉得能提神。当它不分青红皂白地捣毁一切真理，无目的无休止地驱使人干下去的时候，可就确实是尽在坏事了。我在思想里把这种恶的无穷截住了，你在语言里始终截它不住的。

伽马：我可始终没说过一定会有无穷多的反例。干到某个地步，我们也许会达到真理，那时候反驳的洪流就截住了。究竟什么时候，当然是我们不知道的。只有反驳是斩钉截铁的，证明是个心理学问题。②

兰勃达：我依然坚信，反驳泯灭之日，便是绝对确实性闪现光芒之时！

卡帕：可是，有那一天么？万一上帝创造多面体的时候就安排好了，用人类语言表述的论及多面体的一切真全称陈述都是无穷长的，如何是好？贸然推定(合乎神意的)真定理长度有穷，岂不是渎神的拟人观吗？

坦白说吧，由于这个那个缘故，你们全都对频仍的反驳和断续的定理形成厌倦了。何不就此罢手，不玩这种游戏了？你们已然放弃了“证毕”，何不把“诸证均毕”也放弃了拉倒？反正真理只归于上帝。

帖塔(旁白)：宗教怀疑主义者是科学的最恶劣的敌人！

西格马：还是别太戏剧化啦！极而言之，也只有一小块若明若暗的含混区出了险情。我先前就说过的，含混之处不外乎是

---

① 英语有“infinite regress”(无穷回溯)一词，但这只是“恶的无穷”(schlechte Unendlichkeit)的一种特殊情况，这儿用不上。阿尔发造这个短语显然是想到了“vicious circle”(恶的循环)。

② “逻辑迫使我们拒绝某些推论，却不能迫使我们相信任何推论”(勒贝格[1928]，第328页)。*编者按：应当指出，按字面了解，勒贝格的话是假的。现代逻辑向我们提供了有效性的一种准确刻划，可以表明某些推论是满足它的。可见，逻辑确实能迫使我们相信一个推论，尽管它也许不能迫使我们相信一个有效推论的结论，因为我们也许不相信某一个或某几个前提。

并非一切命题非真即假。还有第三类，现在我想叫做“或多或少严格的”命题。

帖塔(旁白)：三值逻辑，这就是批判理性的下场！

西格马：……陈述这类命题的有效范围，只求有或多或少适合的严格性就可以了。

阿尔发：适合于什么？

西格马：适合于解决我们想解决的问题。

帖塔(旁白)：实用主义！难道人人都对真理丧失了兴趣吗？

卡帕：或者适合于时代精神！“够用一天，就严格一天”。①

帖塔：历史主义！（作晕倒状。）

阿尔发：兰勃达给“严格的证明分析”制订的规则剥夺了数学之美，捧着充斥于枯燥的大部头书里的、又长又笨的定理当礼物，硬要我们吞下那套不识大体的臭规矩，最后只会搞得我们掉进恶的无穷而不能自拔。卡帕的逃生之计是约定，西格马的是数学实用主义。妙哉，这就是理性主义者的选择余地！

伽马：所以说，理性主义者理当好好品尝阿尔发佳肴的滋味：“严格的证明”、不发音的直觉、“隐蔽引理”、嘲笑虚假性反传导原理、勾销反驳，对吧？数学应该跟批评和逻辑绝交，对吧？

倍塔：不管怎么样，我算是让这一大场无结局的阴阳怪气的舌战给喂饱了。我想搞数学。核正数学基础会碰到什么哲学困难，我无兴趣。即使理性无能，拿不出这样的核正，我的自然本能也会让我放心。②

据我获悉，欧米伽做了一件有趣的事，把各种别具一格的证明搜集在一起了。我倒宁愿听他讲讲。

欧米伽：我可要把这些证明塞进一副哲学框架呢！

倍塔：我不在乎包装，只要包装袋里有点东西。

按语。在第5节里我试图说明，数学批评的涌现是怎么成为探寻数学“基础”的动力的。

看来，我们走的决定性的一着是区分了证明与证明分析，并相应地区分了证明的严格性与证明分析的严格性。1800年前后，大家都是把严格的证明（清澈如晶的思想实验或作图）跟杂乱无章的推论，跟归纳概括对照着说的。欧拉所谓“论证的严格性”是这个意思，康德心目中的万无一失的数学也是以这个概念为基础的（见康德[1781]第716—717页上数学证明的范例）。大家也都以为，一个人总该是在证明他所求证者。谁也不曾想过，让思想实验发音会有什么真正的困难。亚里士多德的形式逻辑与数学还是互不通气的两门学问，数学家把形式逻辑视同废物。无需乎什么演绎模式或“逻辑”结构，证明或思想实验就能叫人全盘信服了。

十九世纪初，滔滔不绝的反例带来了鱼龙混杂的局面。既然证明清澈如晶，反驳只能是不可理喻的非非之想，只能跟毋庸置疑的证明彻底隔开来看。哥西的严格性革命立足于一种革新见解：数学家不能停留在证明上头，应当再往前走，找出他究竟证明了什么，办法是把例外枚举出来，或者不如说是把证明生效的安全地带陈述出来。可是，哥西没有——阿贝尔也没

---

① 摩尔[1902]，第411页。

② “自然驳倒了怀疑主义者，理性驳倒了教条主义者”（帕斯卡[1659]，第1206—1207页）。很少有数学家宁愿象倍塔那样老实承认，理性太软弱了，无力核正自身。他们大多采取某种牌号的教条主义、历史主义或混乱的实用主义，仍然古怪地闭眼不看这是站不住脚的。例如：“数学真理事实上是全然不容争辩的知识的典范……但数学的严格性也不是绝对的；数学处在不断发展的过程中；数学原理不是一次凝成的，它们有自己的生活史，甚至可以成为科学论争的对象”（亚历山大罗夫[1956]，第7页）。（这段引文可以提醒我们，辩证法试图不用批评而说明变化：真理“在不断发展”，但永远是“全然不容争辩的”。）

有——看出这两个问题之间有任何联系。他们从来不想想，既发现了例外，总该再瞧证明一眼吧。（另一些人搞的是怪物除外、怪物校正乃至“假装瞎眼”，但一致同意证明禁绝“例外”，彼此毫不相干。）

十九世纪逻辑与数学结盟有两大根源，一是非欧几里得几何，一是魏尔斯特拉斯学派的严格性革命。这个学派实现了一个证明(思想实验)与多种反驳的一体化；他们把演绎模式逐步引进证明(思想实验)，从此开始发展出了证明分析。我们所说的“一证多驳法”正是他们在助探论上的革新。有了这种方法，逻辑与数学才第一次结成了联盟。那些个反动的怪物除外者和引理隐蔽者动用了种种斗争口号，诸如“严格性乏味”、“要美，不要人为性”之类，但魏尔斯特拉斯学派的严格性还是征服了它的对手们。证明分析的严格性使证明的严格性报废了。大多数的数学家却甘心忍受它那套奥规矩，这只是因为它有诺言在先，要赏给他们完满的确实性。

康托尔的集合论——它一诞生，“严格的”定理又有意想不到的反驳蹦了出来——把许多魏尔斯特拉斯学派的老卫士变成教条主义者。他们以空前的决心向“无政府主义者”开战，或者把新怪物除外，或者说他们那些代表“严格性最佳花色”的定理中原就有“隐蔽引理”，一面却依然因其犯有雷同罪而从严发落老一号的“反动派”。

这时，有些数学家恍然大悟，用多证多驳法追逐证明分析的严格性会掉进恶的无穷。一场“直觉主义的”反革命运动开始了：证明分析那套尽在坏事的逻辑学-语言学奥规矩宣布作废，给证明创制了新式极端主义的严格性标准；数学和逻辑再度离婚。

逻辑主义者想方设法挽救这场婚姻，反让悖论碰跛了腿。希尔伯特学派的严格性把数学转换成一张证明分析的蜘蛛网，

自以为他那直觉主义元理论中清澈如晶的一致性证明截住了他们的无穷回溯。“基础层”，也就是不准批评的熟悉地区，一变而为元数学的思想实验了。(参见拉卡托斯[1962]，第179—184页。)

每经过一次“严格性革命”，证明分析便更深一层地渗透到证明之中，唯独到不了“熟悉的背景知识”这个基础层(也参见第50页注①)，那是个清澈如晶的直觉、证明的严格性主宰一切的王国，批评被逐出了教门。可见，严格性层次之分，只不过是指在哪里给证明分析的严格性和证明的严格性画界线，也就是说，在哪里该停止批评而开始核正。“确实性从来没到手”；“基础”从来没打过基础。而由于“理性的狡猾”，在数学领域中，严格性长一分，内容就减一寸。不过，个中情节不在目前调查的范围之内。①

---

① 编者按：我们相信，这条历史按语有点低估了数学“严格主义者”的成就。在数学里向“严格性”推进，剖析到最后，是向两个互相分隔的目标推进，就中只有一个能到手。这两个目标，一是严格正确的推论或证明(为的是经此路把真实性万无一失地从前提传到结论)，二是严格真的公理或第一原理(为的是从这个原点把真实性注入系统，然后经严格证明传遍整个的数学)。第一个目标已知能到手(当然要先作某些假定)，第二个已证不能到手。

弗雷格和罗素备置了能够翻译(或有一失的翻译，见第2章第3节)数学的系统，内有有穷多条预先定死了的证明规则。而且，的确能够看出(这里就要用上刚才提到的假定了)，凡是用这些规则可证的句子都是该系统公理的有效推断(就是说，如果这些公理真，所证明的句子也必定真)。在这类系统里，证明不得有“缺漏”，因而一串句子是不是证明能够在有穷多步之内核查清楚。(当然，如果按核查结果该公式序列不是我们考虑的那个系统中的证明，这并不足以确定结尾公式在该系统中没有证明。因此，证明核查手续里有一种利于验证而不利于否证的反对称性。)不论按哪一种郑重的涵义来说，都不能说这样的证明也是或有一失的。(不错，也许凡是检查过某个这样的证明的人统统都犯了某种讲不出道理的错误，但这算不上郑重的怀疑；不错，也许断言这样的有效证明在传导真实性的非形式(元)定理是假的，但这种设想也没有什么郑重的理由。)可是，按某种并非平淡无奇的涵义来说，这类系统的公理确是或有一失的。想从“自明的”、“逻辑的”真理推演出全部数学的试验已经破产了，这是众所周知的。

6. 再谈用局部而非全局反例来批评证明。内容问题

(a) 用更深刻的证明来增加内容

欧米伽：我喜欢兰勃达的一证多驳法。我跟他有共同的信仰：最后总有法子得到严格的证明，因而得到确实是真的定理。但纵然如此，我们用的方法本身还是引起了一个新问题：证明分析一面在增加确实性，一面又在减少内容。证明分析里每添上一个新引理，定理里每添上一个相应的新条件，都缩小了它的范围。严格性倒是越来越大，适用的多面体却越来越少了。引理并入岂不是在重蹈倍塔为安全而孤注一掷的覆辙？我们岂不也会是“撤得太猛，把成批的欧拉多面体甩在城墙外头了”？这叫殊途同归，说不定都把婴儿跟洗澡水一起倒掉了。面对严格性减少内容的压力，应当有一个抵销它的力才对。

我们原先就顺着这个方向走过很少的几步。让我提醒诸位回想两个事例，重新审查一下这两个事例。

一个事例出现在我们首次遭遇局部而非全局反例的时候。伽马驳倒了头一个证明分析里的第三引理（“从平三角化网络里移走三角形的时候，只有两种可能：要么移走一棱，要么移走二棱一顶点”）。他从网络中央移走了一个三角形，而一个棱或顶点也没移走。

当时我们有两种可能。① 第一种是把那条假引理并入定理。从确实性着想，这么做再对不过，可是这会急剧缩小定理的范

---

① 欧米伽似乎漏了第三种可能：伽马完全可以说，既然局部而非全局反例没有一点会破坏虚假性反传导原理的迹象，就没什么大不了的。

围，小到只适用于四面体。结果，除了一个幸免，所有的例子都会被我们跟反例混在一起当污水泼掉。

正是出于这个理由，我们才选了另一条路，不是用引理并入把定理范围弄窄，而用未被否证的引理换掉被否证的引理来把它加宽。但是，这种对定理形成生死攸关的模式顷刻之间就被大伙儿抛到了脑后，兰勃达也不肯费点心思把它表述成一条助探规则。这条规则应当是：

规则4. 如果你有一个局部而非全局反例，就设法用未被否证的引理换掉被驳倒的引理，来改进你的证明分析。

定理的内容，在第三类(全局而非局部)反例的压力之下不停地减少，第一类(局部而非全局)反例可以提供一个机会去使它增加。

伽马：规则4又一次让阿尔发业已放弃的"完善证明分析直觉"的弱点露馅了。要他来干，他准会把可疑引理一一列出，立即如数并入，形成一串近乎空洞无物的定理，因为他不乐意出反例嘛。

教师：欧米伽，你说好要举第二个事例的，讲给我们听听吧。

欧米伽：按倍塔作的证明分析，第二引理是"所有的面都是三角形的"。这会被许许多多的局部而非全局反例否证掉，例如立方体或十二面体。所以，老师，你才不用它，而换成了这些反例否证不掉的引理，即"任何一面用一对角棱剖分之后都分成两块"。可是，你不去求规则4保佑，却一味埋怨倍塔"不细心作证明分析"。你会承认的，规则4这条计策总比"更细心点"略高一筹吧。

倍塔：你说得对，欧米伽。经你一说，我对"最好的那种例外除外者的方法"的理解也略高一筹了。他们一开头只作一个谨

慎的"安全的"证明分析，然后就一以贯之地应用规则4，结果，一句假话不说，照样也把定理逐步建造起来了。靠一个比一个假的过甚其辞还是靠一个比一个真的过谦其辞去逼近真理，这毕竟是个性格问题。

欧米伽：也许是的吧。不过，规则4可以按两种方式解释。我们至今只考虑了第一种解释，弱解释："不费力地琢磨和改进证明，只要把假引理换成反例驳不倒的略微改过一下的引理就行了"。为此需要干的全部事情就是"更细心地"核查证明，来一点"微不足道的观察"。照这种解释，规则4也不过是在原证明的框框里缝缝补补而已。

我还要容纳另一种解释，激进解释：换掉引理，没准儿是换掉一切引理，办法可不只是从已有证明里把点点滴滴的内容全挤出来，可能是要去发明某种迥然不同的、更广博的、更深刻的证明。

教师：有例子吗？

欧米伽：前些日子我跟一个朋友讨论笛卡儿-欧拉猜想，他当即拿出下面这么个证明：让我们设想多面体是空心的，表面是用任何坚硬材料做的，比方说用纸板做的。棱必须清清楚楚画在背面。假定多面体内部通明透亮，又假定有一面是一部普通照相机的镜头，我可以从那一面给所有的棱和顶点拍一张快照。

西格马(旁白)：照相机也进了数学证明？

欧米伽：于是我得到一幅平面网络图，能跟你证明里的平面网络一模一样地处理。我也能依样表明，如果面都是单连通的，$V-E+F=1$，再添上相片里看不见的做了镜头的那一面，我就得到了欧拉公式。这里的主引理是：多面体上有一面，如果换成照相机镜头，能拍摄多面体内部，让所有的棱和顶点都在胶卷上显影。现在我引进一个简称，不说"至少能从一面拍遍其内

部的多面体”，而说“准凸多面体”。

倍塔：所以，你的定理是：所有带单连通面的准凸多面体都是欧拉的。

欧米伽：为了简洁，也为了给这个特别的证明计谋的发明人记一功，我宁愿说：“所有日果内多面体都是欧拉的”。①

伽马：可是，有好多简单多面体，虽然彻头彻尾是欧拉的，却又坑坑洼洼得可怕，以致从哪一面也无法拍遍内部！不是日果内证明比哥西证明深刻，倒是哥西的比日果内的深刻啊！

欧米伽：那还用说！我想老师谅必知道日果内证明，由一些局部而非全局反例发觉它不能令人满意，才把光学（拍摄）引理结换成了更宽的拓扑（绷开）引理。所以说，他能得到更深刻的哥西证明，不是靠“细心作证明分析”再跟着来上一点轻微的改动，而是靠某种激进的富于想象力的创新。

教师：我承认你的例子举得好。不过，我不知道有日果内证明那么回事。你既然知道，为什么不早告诉我们呢？

欧米伽：因为我当即用非日果内的欧拉多面体把它给驳倒了。

伽马：我刚才说过，我也发觉有这类多面体。不过，这能算是一笔抹掉日果内证明的理由么？

欧米伽：我想能。

---

① 日果内证明要在吕里埃[1812—1813a]第177—179页上才找得着。按原貌，它自然不会包括拍照这一手。它是说：“取一多面体，有一面是透明的：设想从外部把眼睛靠拢这一面，近到能够看见别的每一面的内部……”日果内谦虚地指出，哥西证明更深刻，它“有一个可贵的优点，就是根本不假定凸性”。（然而，他没有起意追问一下它假定的是什么。）稍后，施坦纳又重新发现了本质上相同的证明（[1826]）。这时别人提醒他优先权归于日果内，他便读了吕里埃那篇附有例外清单的文章，但是这并不妨碍他以“所有多面体都是欧拉的”这个“定理”作他证明的结论。（正是施坦纳的文章激怒了赫塞尔——德国人的吕里埃——去写他的[1832]。）

教师：你听说过勒让德的证明吗？你肯把它也抹掉吗？

欧米伽：我当然肯。它还要不能令人满意，它的内容贫乏到了比日果内证明都不如。他的思想实验是先把多面体以一中心投影映射到包住多面体的一个球面上。球的半径，他定为1。投影中心的选法，他要求做到，经投影后球面多边形的网络一次并且仅仅一次就盖满球面。因此，他的第一引理是：存在这么一个点。他的第二引理是：对于球面上的多边形网络，$V-E+F=2$。而这两条引理，他又如愿以偿地分解成球面三角学上平淡的真引理了。但是，可能充当这种投影中心的点，只有凸的和少数正派的"近凸的"多面体里才存在。这类多面体比"准凸的"还要窄。"所有勒让德多面体都是欧拉的"这个定理，① 毕竟与哥西定理迥然不同，但只是更糟而已。它"不完备得叫人泄气"。② 它是"空忙一场，因为它先入为主假定了欧拉定理根本不依赖的条件。必须把它抹掉，必须去找更一般的原理"。③

倍塔：欧米伽说得对。"在一定程度上，凸性对欧拉性来说是可有可无的。例如说，只要敲凹一块，或者在一个或几个顶

---

① 勒让德证明在其[1803]里能找到，证明生成的定理却找不到，因为十八世纪的人对证明分析和定理形成实际上是无所知的。勒让德首先把多面体定义为由多边形面组成其表面的立体(第161页)，然后一般地证明了 $V-E+F=2$(第228页)。可是，在精装本第164页上的一条注里又来了个例外除外式的改邪归正，说是只考虑凸多面体。至于近凸的极端分子，他不予理会。庞索特在[1809]里评勒让德证明时才第一次察觉，欧拉公式"并不仅仅对凸立体（也就是至多取两点便可用一直线切断其表面的立体)有效。它对有凹角的多面体也成立，只要能在该立体内部找一点作球心，从球心引直线可将多面体的面投影到球面上而不使各投影面相交。这适用于无穷多的有凹角的多面体。其实，按原貌，勒让德证明对其他这一切多面体也是适用的"(第46页)。

② 德某奎埃的话。往下还有话，又是从庞索特[1858]剽窃来的一个论据："求勒让德或诸如此类的大权威来保佑，只会助长一个偏见：欧拉定理的有效范围只是凸多面体。这个偏见传播很广，连一些聪明绝顶的人也被俘虏了"([1890a]，第111页)。

③ 引自庞索特([1858]，第70页)。

点猛按一下，凸多面体就可以变成示性数相同的非凸多面体了。欧拉关系式是与某种比凸性更根本的东西相对应的。"① 你就是给这张网子添些"近"和"准"的花边，也永远捉不住那种东西。

欧米伽：我过去以为，老师已经用哥西证明的拓扑原理把它捉住了。在这个证明里，引理焕然一新，勒让德证明的一切引理都换掉了。从古至今，的确要数它最深刻了。可是，随后我偶尔撞上一个多面体，把它也给驳倒了。

教师：我们倒要听听这是怎么回事。

欧米伽：诸位都还记得伽马的"海胆"吧(图7)。诚然，那是非欧拉的。不过，也不是所有的星状多面体都是非欧拉的嘛！比方说，瞧瞧这个"大星芒状十二面体"(图15)。它也象"小星芒

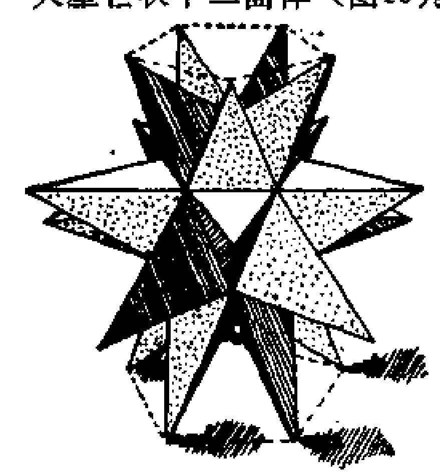


图15

状十二面体"一样，是五角星形组成的，可是排法不同。它有12个面，30个棱和20个顶点，所以 $V-E+F=2$。②

教师：你因此就要拒绝我们的证明？

欧米伽：我要。"大星芒状十二面体"的欧拉性，满意的证

① 萨默维尔([1929]，第143—144页)。

② 开普勒早已设计了这个"大星芒状十二面体"([1619]，第53页)，后来庞索特又独立设计，并且最先检验它有无欧拉性。图15是从开普勒的书中复制的。

明必须也解释得了。

罗：何不承认你的“大星芒状十二面体”有三角形面呢？你自寻烦恼，因为你想象力太小。

德尔塔：我同意，他是自寻烦恼，但原因是他的想象力太大了。星状多面体婀娜多姿，我如今也爱上了。可是，它们跟普通的多面体恐怕本质上有所不同。所以，比方说立方体和“大星芒状十二面体”虽然都有欧拉性，要说哪个证明只用一套计谋就解释得了，那简直不可思议。

欧米伽：凭什么做不到？你的想象力简直等于零。在日果内证明之后，哥西证明之前，你准会死抱成见，说凹凸多面体本质上有所不同，所以，凹凸多面体虽然都有欧拉性，要说哪个证明只用一套计谋就解释得了，那简直不可思议，是吗？我还是从伽利略的《对话》里引几段话吧：

> 萨格瑞多：所以，诸位都瞧见了，一切行星和卫星——咱们不妨一概叫“行星”——都是成椭圆运动的。
>
> 萨尔瓦梯：恐怕有行星是成抛物线运动吧。瞧这块石头。我把它扔出去，结果它沿抛物线运动了。
>
> 辛普里丘：可是，这块石头不是行星呀！这两种现象隔得太远啦！
>
> 萨尔瓦梯：这块石头当然是行星，只不过扔它的手不及抛月球的那只手气力大。
>
> 辛普里丘：无稽之谈！你怎么敢把天上和地上的现象相提并论？彼此不沾边嘛！当然，两样东西也许都能用证明来解释，但我有把握料定这两种解释毫无共同点！一是天上的行星，一是地上的弹丸，各走各

的路线。要说哪个证明只用一套计谋就解释得了，

我才不能想象哩。

萨尔瓦梯：你是不能想象，我却能够设计……①

教师：别管什么弹丸和行星啦，欧米伽。你想找一个证明，把普通欧拉多面体和星状欧拉多面体都囊括在内，你到底成功了没有？

欧米伽：尚未成功，计日可成。

兰勃达：就算成了吧，这对哥西证明又有什么影响？你究竟为什么把证明一个接一个地拒之门外，你倒是真得有个解释了。

(b) 向最终的证明和相应的充分必要条件推进

欧米伽：你过去批评证明分析是因为有第三类反例②搞垮了虚假性反传导。我现在批评它们是因为有第一类反例③搞垮了虚假性传导（或者说真实性反传导，这是一回事）。一个证明必须给千变万化的欧拉性现象作通盘解释。

我不光追求确实性，还追求最终性。定理应该是确实的，不得有任何反例在它的范围之内；但是也应该是最终的，不得有任何例子在它的范围之外。我想把分界线画在例子与反例的正当中，不想画成一边是少量例子所在的安全地带，另一边是例子加反例的大杂烩。

兰勃达：换言之，你想叫定理的条件不但充分，而且必要！

① 我未能查阅这几段话的原文。

② 全局而非局部反例。

③ 局部而非全局反例。

卡帕：为了便于辩说，不妨设想你找到了这么个大定理："所有大多面体都是欧拉的"。你明白吗，只有当逆定理"所有欧拉多面体都是大多面体"是确实的，这个大定理才会是最终的？

欧米伽：不言而喻。

卡帕：这就是说，如果确实性迷失在恶的无穷里了，最终性下场也是一样。你的证明一个比一个深刻，但是每个证明的范围之外至少找得到一个欧拉多面体。

欧米伽：不言而喻，我知道不解决确实性问题也解决不了最终性问题。我有把握，两个问题将来都会解决。第一类和第三类反例漫无边际的泛滥将来总会停止的。

教师：你想搜索出越来越多的内容，这是很重要的工作。但是，为什么不说你给满意的证明定下的第二条准则"最终性"是某种值得庆幸的意外收获，偏说它是义务呢？为什么要把没讲出充分必要条件的有趣证明拒之门外呢？为什么认为它们被驳倒了呢？

欧米伽：嗯……①

兰勃达：不管怎么样，有一点欧米伽确实说服了我：要想批判地改进朴素猜想，单用一个证明也许不够。我们的方法应当把他的规则4的激进提法也收进来，这么看，它就该叫"多证多驳"法，不该叫"一证多驳"法。

缪：原谅我插嘴。刚才我把诸位的讨论结果翻译成准拓扑

---

① 答案就在大名鼎鼎的帕普斯的古代助探论中。这种助探论只适于发现"最终的"、"终极的"真理，也就是讲出了充分必要条件的定理。就"证明题"来说，其主要规则是："如果你有一个猜想，由它引推断。如果你得的推断已知假，猜想便假。如果你得的推断已知真，倒转次序重推。如果猜想能从这个真推断引出，它便是真的。"（参见希斯[1925]，I，第138—139页。）采取"原因等于结果"这条原理，追求有充分必要条件的定理，都由这种传统而来。只是到了十七世纪，把帕普斯助探论用于近代科学的种种努力都付诸东流之后，对确实性的追求才压倒了对最终性的追求。

术语了。引理并入法产生了一个收缩序列，由逐渐改进的定理的范围逐层嵌套而成；在全局反例的持续打击之下，随着隐蔽引理一一浮现，这些范围在缩小，在向某极限收敛；让我们把这个极限叫做“这种证明分析的范围”。如果应用规则4的弱提法，这个范围又会在局部反例的持续压迫之下变宽。这个扩充序列又有某极限，我要把它叫做“这种证明的范围”。后来经过一番讨论，又看出连这个极限范围也可能过窄（甚至说不定是空的）。我们也许不得不去设计各种更深刻的证明，它们的范围形成一个扩充序列，逐步收容对先前的证明构成局部反例的越来越难驾驭的欧拉多面体。这些范围本身是极限范围，而又会收敛于某二重极限，叫做“朴素猜想的范围”。归根结底，这才是探究的目的。

这种助探论空间的拓扑学会成为数理哲学的问题：各序列是无穷的么？究竟会收敛么？能到达极限么？极限可能是空集么？

易卜西隆：我找到了一个证明，比哥西的还深刻，连欧米伽的“大星芒状十二面体”的欧拉性也给解释掉啦！（递给教师一张条子。）

欧米伽：最终的证明来啦！欧拉性真正的本质现在揭晓啦！

教师：对不起，时间不够，只好改次讨论易卜西隆这个很繁的证明了。① 我怎么也看不出，按欧米伽那种涵义，它会是最终的证明。对吗，倍塔？

(c) 不同的证明产生不同的定理

倍塔：我从这场讨论悟出一个最最有趣的道理，那就是，同一朴素猜想的不同证明通向大不相同的定理。笛卡儿－欧拉

① 编者按：易卜西隆条子里的内容在第2章里揭晓。

猜想只有一个，但每经一次证明，都改进成了一个不同的定理。我们的原证明产生了“所有哥西多面体都是欧拉的”。如今我们又学到了两个迥然不同的定理：“所有日果内多面体都是欧拉的”和“所有勒让德多面体都是欧拉的”。三种证明，三个定理，来自一个共同的祖宗。① 足见“欧拉定理的不同证明”这种通用语是混淆不清的，因为它掩盖了证明在定理形成中举足轻重的作用。②

---

① 欧拉猜想还有好多别的证明。欧拉、约当、庞卡勒证明详尽的助探论讨论，见拉卡托斯[1961]。

② 庞索特、吕里埃、哥西、施坦纳、克瑞勒都以为不同证明是在证明同一定理，即“欧拉定理”。引一部标准教科书里一句典型的话：“这个定理出自欧拉，第一个证明出自勒让德，第二个出自哥西”(克瑞勒[1827]，2，第671页)。

当庞索特看出勒让德证明不仅仅适用于普通凸多面体的时候(见第69页注①)，差不多就要察觉这种区别了。可是，他随后对比勒让德证明与欧拉证明(基本点是切掉多面体的棱锥角，最后得出一个四面体而不改变欧拉示性数)，却说勒让德证明较为可取，理由是它有“简单性”[1858]。这里“简单性”代表十八世纪的严格性观念，指思想实验的清晰性。他不曾起意从内容上对比两种证明，否则就会发觉还是欧拉证明优越。(事实上，欧拉证明没什么错。勒让德应用了因时制宜的严格性这个主观标准，而忽略了内容这个客观标准。)

吕里埃暗中批评这段话(没点庞索特的名)的时候，道破了勒让德的简单性只是“虚有其表”而已，因为它预设的球面三角学背景知识多得可观([1812—1813a]，第171页)。但吕里埃也相信勒让德与欧拉在“证明同一定理”(同上，第170页)。

施坦纳跟他齐心，同样地评价勒让德证明，同样地认定一切证明都在证明同一定理([1826])。唯一的区别是，据施坦纳说，不同证明证的是“所有多面体都是欧拉的”，而据吕里埃说，不同证明证的是“所有无坑道、无空穴、无环形面的多面体都是欧拉的”。

哥西才二十过头就写了他论多面体的[1813a]，远在他发动严格性革命之前。他在论文第二部分引言里重复了庞索特给欧拉和勒让德证明作的对比，也未可深责。他跟大多数同代人一样，抓不住不同证明在深度上的区别，因而认识不到自己证明的威力。照他想，他也不过是给出了同一定理的另一种证明。但是，他确曾相当急切地强调，他得到了一个挺稀松平常的概括，把欧拉公式推广到一类特定的多面体了。

日果内才是认识到哥西证明无与伦比的深刻性的第一个人(吕里埃[1812—1813a]，第179页)。

派：不同的证明之间的区别比这要深刻得多哟。只有朴素猜想讲的是多面体。各个定理讲的分别是哥西对象、日果内对象、勒让德对象，根本不再是多面体了。

倍塔：你是存心开玩笑吧？

派：不是，我要解释我为什么这样想。不过，我宁愿把我的解释纳入一个更广的话题。我想泛论概念形成。

泽塔：我们不如先详论内容为好。我发现，即使按其激进解释，欧米伽的规则4也很弱。

教师：对。那么，我们就先听听泽塔怎么处理内容问题，再讨论概念形成，这场争论也就该收场了。

7. 内容问题复议

(a) 朴素猜想的朴素性

泽塔：怪物除外者、例外除外者和引理并入者无不以牺牲内容为代价去求得确实的真理，我跟欧米伽一样深感痛心。不过，他的规则4只要求给同一朴素猜想作更深刻的证明，这还不够。我们对内容的搜索工作凭什么该局限于头一个偶尔碰上的朴素猜想？我们探究的目的凭什么该是“朴素猜想的范围”？

欧米伽：我不懂你的意思。我们的问题岂不就是要发现$V-E+F=2$在什么范围内真吗？

泽塔：才不是呢！我们的问题是要找出，不论对任何多面体，V、E、F之间有什么关系。我们最先熟悉了$V-E+F=2$的多面体，纯系巧合。批判地探究了这些“欧拉”多面体之后，事实告诉我们，非欧拉多面体比欧拉多面体还要多。为什么不

去找$V-E+F=-6$，$V-E+F=28$或$V-E+F=0$的范围呢？这些关系式不也同样挺有趣吗？

西格马：你说得对。我们如此热中于$V-E+F=2$，不过是因为我们原先以为它真。现在明知不真，就该去找一个新的更深刻的朴素猜想……

泽塔：……它会不大朴素了……

西格马：……它会是任何多面体的V、E、F之间的关系。

欧米伽：何必冒进呢？还是先解决我们正在求解的那个谦虚点儿的问题，先解决为什么有些多面体是欧拉的吧。我们至今只得出些残缺不全的解释。比方说，已找到的证明还没有一个解释得了，为什么腹背都有环形面的画框是欧拉的(图16)。它有16个顶点、24个棱和10个面……

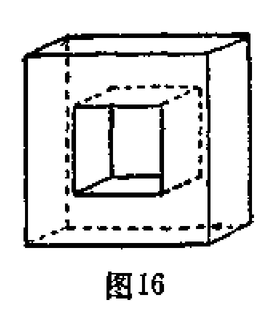


图16

帖塔：这的确不是个哥西多面体，有一条坑道，又有若干环形面……

倍塔：而反倒成了欧拉的！好不合理呀！只犯一项过失的多面体——有坑道而无环形面(图9)——就要当恶棍赶将出去，干了双份罪行的多面体——还有环形面(图16)——反倒能充善人挤将进来？①

① 这个问题，吕里埃注意到了([1812—1813a]，第189页)，赫塞尔[1832]也独立地注意到了。在赫塞尔的文章里，两种画框的图是一前一后挨着的。也参见第93页注①。

欧米伽：你瞧瞧，泽塔，只说欧拉多面体，谜就够多了。还是先解开这些谜，下一步再谈更一般的问题吧。

泽塔：不对，欧米伽。“多几个问题也许比一个问题好回答。野心更大的新问题也许比原问题好对付。”①我要做给你看看，的确只有解决了这个更广泛的本质的问题，你那个狭隘的偶然的问题才能解决。

欧米伽：我偏想发现欧拉性的秘密！

泽塔：我理解你为什么抵触。你已经堕入情网，跟上帝在哪儿给欧拉与非欧拉多面体划界的求解题如胶似漆了。可是，没理由相信上帝的宇宙蓝图里准出现过“欧拉的”这个字眼儿。万一欧拉性只是某些多面体的偶有性质呢？在那种情况下，还要找欧拉与非欧拉多面体之间毫无定规的弯弯曲曲的分界线，就很无趣了，甚至不可能了。承认这一点，无论如何玷污不了理性主义，因为，那时候欧拉性不再是合乎理性的宇宙设计的一部分了。所以，还是忘掉那回事吧。批判理性主义的要点之一，就是时刻做好准备，在求解过程中放弃原问题而代之以另一问题。

(b) 作为多证多驳法基础的归纳

西格马：泽塔言之有理。这才是祸不单行哟！

泽塔：祸不单行？

西格马：是的。你现在不是想要一个新的“朴素猜想”，把任何多面体的V、E、F之间的关系都说到吗？不可能！瞧瞧这一大堆反例吧：又是有空穴的，又是有环形面的，又是有坑道的，

---

① 坡亚把这叫做“发明者的悖论”（[1945]，第110页）。

又是在棱上、在顶点上相连的 …… $V-E+F$ 随便取什么值都可以！你休想从这一团混乱中理出任何秩序！我们已经眼巴巴地看着欧拉多面体的坚实基地成了一潭烂泥！我们已经无可挽回地丧失了一个朴素猜想，不能指望另得一个啦！

泽塔：可是……

倍塔：凭什么不能？请回想当初，就连最最普通的凸多面体，我们给它们的顶点数、棱数、面数编的表，也是混乱一团，似乎毫无指望。我们多次受挫，总不能把它们纳入一个公式。① 可是，突然之间，支配它们的真正的规律性震撼了我们的心弦，原来 $V-E+F=2$。

多　面　体	F	V	E
I　立方体	6	8	12
II　三棱柱	5	6	9
III　五棱柱	7	10	15
IV　方棱锥	5	5	8
V　三棱锥	4	4	6
VI　五棱锥	6	6	10
VII　八面体	8	6	12
VIII　"塔"	9	9	16
IX　"截角立方体"	7	10	15

卡帕（旁白）："真正的规律性"？十足的虚假性，措辞精巧罢了。

倍塔：这会儿我们要做的，不外是用非欧拉多面体的材料补足那张表，再找个新公式出来。肯作耐心勤奋的观察，又有点好运气，我们总会猜中正确的公式；然后就可以应用多证多驳法加以改进了。

---

① 见第85页注②。这张表借自波亚[1954]第1卷第36页。

泽塔：耐心勤奋的观察？试完一个公式，又试一个？或许你想设计一台推测机，由它随机编造公式，再对照你的表一一检测吧？依你之见，科学便是如此进步的吧？

倍塔：我不懂你的挖苦话。我们最初的知识，我们的朴素猜想，只能来自勤奋的观察和意外的顿悟，不论找到了朴素猜想之后有多少事务是由批判的“多证多驳”法接办的，这你总该同意吧？任何演绎方法总得从一个归纳基础开始吧？

西格马：你的归纳方法永无成功之日。我们得出 $V-E+F=2$，只是因为原来的表里碰巧没有画框或海胆。现在这种历史的巧合……

卡帕（旁白）：……或者说，上帝的仁慈指导……

西格马：……不复存在，你从一团混乱再也别想“归纳”出秩序了。我们以往正是从长久的观察和走运的顿悟开始，然而失败了。如今你建议从更长久的观察和更走运的顿悟重新开始。我们纵然得到了新的朴素猜想——我怀疑能不能——也只会同样以一败涂地告终的。

倍塔：我们或许该根本放弃探讨吧？我们只能重新开始，先搞到新的朴素猜想，然后再靠多证多驳法干下去。

泽塔：不对，倍塔。我赞成西格马的看法，所以我不从新的朴素猜想重新开始了。

倍塔：没有低层的归纳概括作为朴素猜想，你想从哪儿开始呢？莫非你有一套别致的开始法？

(c) 演绎推测与朴素推测的对立

泽塔：开始？为什么我非开始不可？我发现（或发明）问题的时候，心里就不是空空如也的。

教师：别作弄倍塔了。问题就摆在这儿："多边形的顶点数和棱数之间有一种平淡无奇的关系，就是$V=E$，多面体的顶点数、棱数和面数之间有没有某种类似的关系？"你想如何下手？

泽塔：我既没有政府授权我领导一次多面体普查的证书，又没有大批研究助手去数它们的顶点、棱和面，去把这些材料汇编成表，这便是第一个难处。不过，即使我有，我也没耐心或兴趣试了一个公式又试一个，检验它是否恰到好处。

倍塔：那可怎么好呢？难道你要高卧床头，紧闭双目，把材料扔到脑后？

泽塔：一点不错。我需要从一个观念开始，不需要什么材料。

倍塔：你的观念由何处得到？

泽塔：我们提问题的时候，观念已经在我们心中。事实上，它就在问题的提法本身里头。

倍塔：什么观念？

泽塔：对于一个多边形 $V=E$。

倍塔：有了它，又怎么着呢？

泽塔：问题从来不是从天上掉下来的，总是跟背景知识有关系。对于多边形 $V=E$，这是知道的。多边形么，是一个多边形系统，组成它的多边形只有一个。多面体也是一个多边形系统，组成它的多边形不只一个。但是，对于多面体 $V\neq E$。从单多边形系统转到多多边形系统，$V=E$是在什么地方栽了跟头呢？我才不搜集材料哩，我偏要追查一下这个问题是怎么从我们的背景知识里生长出来的；换言之，这个问题是因为什么样的期望落了空才出现的。

西格马：对。我们就按你出的主意做吧。对任何多边形 $E-V=0$（图17(a))。如果我把另一多边形拼到它上面（不必在

同一平面上），会怎么样？后添的多边形有 n_1 个棱和n_1 个顶点；把它拼到原多边形上面总是沿一条有n_1'个棱和 $n_1'+1$ 个顶点的链去拼的，因此，棱数会增加 n_1-n_1'，顶点数会增加 $n_1-(n_1'+1)$；这就是说，在新的2-多边形系统中，棱数与顶点数相比会有一个超出量：$E-V=1$（图 17(b)；一种不合惯例但完全正当的拼法见图17(c)）。给系统"拼"上一个新面永远会使这个超出量增加一，换言之，按这种作图法，对于 F= 多边形系统 $E-V=F-1$。

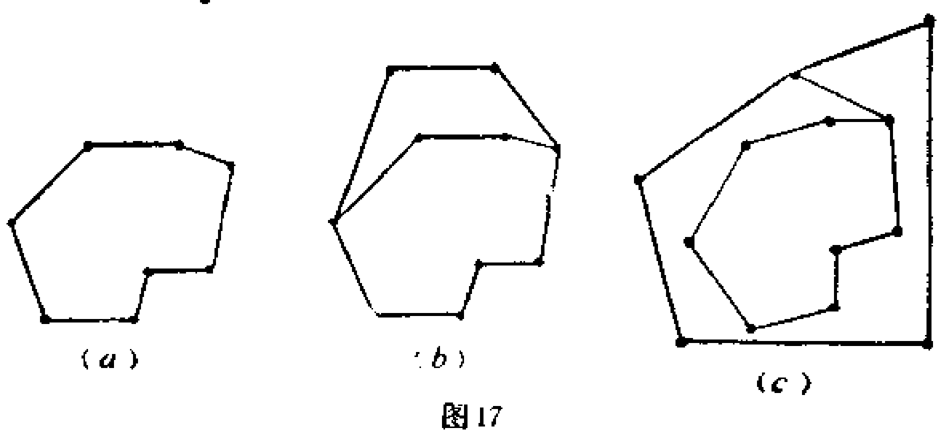


图17

泽塔：换言之，$V-E+F=1$。

欧米伽：可是，对于大多数的多边形系统，这是假的。瞧瞧立方体……

西格马：可是，我的作图法只能得出有一条棱的环道为界的"开"多边形系统！不难把我的思想实验推广到不再有这样的界的"闭"多边形系统。为了实现闭合，给瓶状的开多边形系统盖上一只多边形盖子就可以了。拼上盖子多边形之后，F 增加一，V和E不变……

泽塔：换言之，按这种作图法，对于闭多边形系统或曰闭多面体，$V-E+F=2$。瞧吧，你连一个多面体的顶点数、棱数、面数也没"观察"，猜想就到手啦！

兰勃达：现在，无需乎“归纳开端”，你也能应用多证多驳法了。

泽塔：有一点区别，就是你不必再设计证明，因为证明已经摆在这儿啦！你尽可紧接着就搞反驳，搞证明分析，搞定理形成。

兰勃达：如此看来，在你的方法里，不是观察，倒是证明先于朴素猜想啊！①

泽塔：算了吧，从证明生长出来的猜想，我才不会叫它“朴素”猜想哩。在我的方法里没有“归纳朴素性”立足之地。

倍塔：不然！你不过是把“朴素的”归纳开端往后推了。你是从“对于多边形 $V=E$”开始的。这句话，难道你不放在归纳的基础上？

泽塔：我跟大多数数学家一样，不会数数。刚才我试着数七边形的棱和顶点来着，头一回数出 7 个棱、8 个顶点，再一数又成了 8 个棱、7 个顶点了……

倍塔：别说笑话了，你到底是怎么得出 $V=E$ 的？

泽塔：我初次明白对于三角形$V-E=0$的时候，曾经深为震惊。不用说，我完全知道，在一个棱上$V-E=1$(图18(a))。我也知道，拼上一个新棱，顶点数和棱数永远会各增加一（图 18(b)

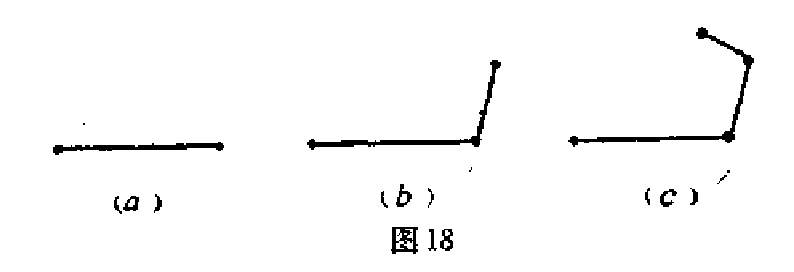


图18

① 这给第 5 页注①加了一层重要限制。

和18(c))。在多边形的棱系统里，又为什么成了 $V-E=0$ 呢？后来我才恍然大悟，这是因为从开的棱系统(有两个顶点为界)转到了闭的棱系统(不再有这样的界)，因为我们把开系统"盖"上了，给它拼了一个棱而没有添新的顶点。这么一来，我就证明了，而不是观察到，对于多边形 $V-E=0$。

倍塔：随机应变帮不了你的忙。你不过是把归纳开端进一步往后推了，如今推到"不论对任何棱，$V-E=1$"这句话了。那句话，你究竟是证明出来的还是观察出来的？

泽塔：证明出来的。不用说，我知道，对于单独一个顶点 $V=1$(图19)。问题在于要建立某种类似的关系……

●

图19

倍塔(大怒)：对于一点 $V=1$，难道你不是观察出来的吗？

泽塔：你是吗？(面朝一旁的派) 我是不是该告诉他，我的"归纳开端"是虚空？我是从"观察"无开始的？

兰勃达：不管怎么样，有两点已经水落石出了。首先，西格马论证了，只是由于历史的巧合，人们才能得到朴素的归纳猜想，要知道，面对一堆混乱不堪的事实，谁都不大有本事把它们纳入一个好公式。随后，泽塔又说明了，对于证明和反驳的逻辑来说，朴素猜想、归纳开端根本就不是不可少的。

倍塔：不然！有些大名鼎鼎的猜想并不以证明领先(甚至也不由证明断后)，如四色猜想(给任何地图着色只用四种颜色就

够了)或哥德巴赫猜想，又该怎么说呢？只是靠着历史的巧合，证明才能先于定理，泽塔的"演绎推测"才能出场，否则总是朴素的归纳猜想率先登堂。

教师：我们确实得学会两种助探模式。演绎推测最好，但朴素推测总比根本不推测要强。不过，朴素推测并不是归纳，没有归纳猜想那种玩意儿。

倍塔：可是，我们找到那个朴素猜想靠的就是归纳呀！"就是说，它是由观察诱发的，由特例预示的……我们审查过的特例可以分两组，有的尚未提出猜想之前就有了，有的事后才来到。前一组诱发了猜想，后一组支持了猜想。两种例子都使猜想与'事实'发生某种接触……"① 这种双重接触正是归纳的心脏：由于前者才有了归纳助探论，由于后者才有了归纳核正或归纳逻辑。

教师：不对！事实不诱发猜想，也不支持猜想！

倍塔：假使不是我那张表里列出的事实，又是什么东西在我心中诱发了 $V-E+F=2$ 呢？

教师：我这就告诉你。你自己也说过，你多次受挫，总不能把事实纳入一个公式。可见，当时的实际情况是你有过三四个猜想，先后很快被驳倒了。你那张表是在检验和反驳这些猜想的过程里造起来的。是这些死了的如今被忘掉了的猜想在诱发事实，不是事实在诱发猜想。朴素猜想不是归纳猜想，我们是靠试试错错，经过多次猜想、多次反驳才得到它们的。② 如果你误信是用归纳从你的表里得到的，如果你误信表越长，表所诱发而

---

① 坡亚[1954]，第1卷，第5页和第7页(重点是我加的)。

② 这种试试错错的情景被坡亚改编得很漂亮。第一个猜想是 F 随 E 增加，这被驳倒了。跟着来了另外两个猜想，一是 E 随 F 增加，一是 E 随 V 增加。第四个才是获胜的猜想：$F+V$ 随 E 增加([1954]，第1卷，第35—37页)。

后支持的猜想越多，你也许就要白费工夫去汇编无谓的材料。还有，如果你听信了发现之路是从事实到猜想、从猜想到证明的说教（归纳的神话），你也许就要完全忘掉助探论上的另一条路：演绎推测。①

数学助探论跟科学助探论很相象，倒不是因为两者都是归纳的，而是因为两者都是以猜想、证明和反驳为特征。双方的区别，重要的区别，在于各自的猜想、证明（在科学里是解释）和反例的性质不同。②

倍塔：我明白了。照这么说，我们的朴素猜想并不是无先例的第一个猜想，并不是由没有猜的成分的硬梆梆的事实“诱发的”，因为有许许多多“超朴素的”猜想和反驳走在它前头。猜想和反驳的逻辑是没有开端的。证明和反驳的逻辑则有开端：它始于第一个由思想实验断后的朴素猜想。

阿尔发：或许是的。不过，照这么说，我当初真不该把这个猜想叫做“朴素的”！

卡帕（旁白）：哪怕在助探论里，也没有彻头彻尾的朴素性这种玩意儿！

倍塔：主要之点是尽早脱离试试错错的时期，快快进入思想实验，别对“事实”怀有过多“归纳的”敬意。这种敬意可能妨碍知识生长。设想你靠试试错错得到 $V-E+F=2$ 这个猜想，但

① 另一方面，因为数学照例用演绎的叙述法，有些人又相信发现之路是从公理和（或）定义到证明和定理。他们也许又要完全忘掉朴素推测的可能和重要。在数学助探论里确实是演绎主义危险性大，在科学助探论里则是归纳主义。

② 数学助探论在本世纪重新崛起归功于波亚。他那令人赞叹的工作的主要特色之一，是强调科学助探论与数学助探论有种种相似之处。唯一可以看作他的弱点的地方也正与这个长处有联系：他从不怀疑科学是归纳的，而由于他正视了科学助探论与数学助探论之间深刻的类似，他就不由自主地认为数学也是归纳的了。同样的情况，早先曾经发生在庞卡勒身上（见他的[1902]，引言），也发生在弗雷歇身上（见他的[1938]）。

又立即观察到画框的$V-E+F=0$而把它驳倒了。如果你对事实敬意过多，尤其是在事实驳倒了你的猜想之后依然唯恐不恭，你就要重起炉灶，再搞"超朴素的"试试错错，再去另找一个猜想。而如果你有一套更好的助探论的话，你至少要试一试，别理会那个倒霉的观察检验，先用思想实验来作个检验，象哥西证明那样。

西格马：混淆黑白到了何等地步！凭什么把哥西证明叫检验？

倍塔：凭什么把哥西检验叫证明？它本来是检验嘛！听着。你是从一个朴素猜想开始：对于所有多面体$V-E+F=2$。然后从它引出一串推断："如果这个朴素猜想真，移走一面之后，剩下的网络有$V-E+F=1$"；"如果这个推断真，即使作了三角剖分之后仍有$V-E+F=1$"；"如果方才这个推断真，把三角形一个一个移走的时候，$V-E+F=1$也会成立"；"如果这句话真，一个孤零零的三角形照样是$V-E+F=1$"……

最后这个结论现在碰巧已知是真的。但是，万一我们当初下的结论是一个孤零零的三角形应有$V-E+F=0$，局面如何呢？我们准会直截了当拒绝原猜想，说它是假的。我们当初干的事不外是在检验我们的猜想，从中引出推断而已。这个检验看来是证实着猜想，不过，证实可不是证明。

西格马：这下子我们的证明所证的岂不比我们以往认为它已证的还要少啦！照这么看，我们还得把整个程序颠倒过来，试一试另作一个思想实验，沿反方向走，从三角形重返多面体！

倍塔：说对了。不过，泽塔已经挑破了，解决这个问题，倒也不必先由试试错错设计出一个朴素猜想，再检验它，再把检验颠倒成证明，尽可单刀直入地从一个名副其实的证明开始。一旦明白了有作演绎推测的可能，这一整套准归纳的蠢规矩可以一

概免去啦！

卡帕(旁白)：好一串戏剧性的骤变啊！批判的阿尔发变成了教条主义者，教条主义的德尔塔变成了反驳主义者，如今归纳主义的倍塔又变成了演绎主义者！

西格马：倍塔，等一会儿。如果说，作完了检验性思想实验……

倍塔：按我的叫法，这叫分析……

西格马：……果不其然又跟着来了一个证明性思想实验……

倍塔：按我的叫法，这叫综合……①

西格马：……能说“分析定理”与“综合定理”必然是一回事么？沿反方向走的时候，我们未尝不可使用不同的引理呀！②

倍塔：如果不同，综合定理该比分析定理优越。无论如何，分析只是在检验，综合则是在证明。

教师：自你发现我们的“证明”其实是检验以来，似乎全班大为震惊，搞得大家的注意力都离开了你的主要论点：假使我们有一个猜想被反例驳倒了，不妨把反驳撇在一边，先设法用思想实验来给猜想作个检验，这么做，也许会瞎中某个证明，摆脱试试错错的状态，而转向多证多驳法。不过，我所以说“我情愿下功夫去‘证明’假猜想”，恰好就是这个缘故嘛！兰勃达在他的规则1里也提过同样的要求：“如果你有一个猜想，就下功夫证明它并且反驳它”。

---

① 按照帕普斯的助探论，数学发现始于猜想，后边跟着分析，这时，假定分析没有把猜想否证掉，后边就跟着来一个综合(也参见第5页注①和第73页注①)。不过，我们这种体例的分析－综合是在改进猜想，帕普斯那种体例不是在证明就是在否证猜想。

② 参见罗宾逊[1936]，第471页。

泽塔：是这么回事。不过，让我来给兰勃达的三条规则和欧米伽的规则 4 作点补充，再加一条

规则 5，如果你有任何一类反例，就设法用演绎推测找出一个更深刻的定理，使它们不再是它的反例。

欧米伽：你可是把我的“深刻性”概念绷开了。也许你是对的吧，不过，你的新规则的实效在哪儿呢？到目前为止，它赏给大家的结果尽是已知的。事后聪明很容易。你的“演绎推测”不是别的，正是跟老师原来作的分析相对应的综合。现在总该讲点信用了。你必须运用你的方法找出这么个猜想，它不是你已知的，而且要还你许下的愿，让内容有所增加。

泽塔：行。我就从我的思想实验生成的那个定理开始：“所有闭正规多面体都是欧拉的”。

欧米伽：“正规”？

泽塔：我不想浪费时间重过一证多驳法那一关。我径直用“正规”一词统称能从某个“完善”多边形这样做成的多面体：(a)先给它拼上 $F-2$个面，保持$V-E+F$不变(这叫开正规多面体)；(b)然后拼上最后一个实现闭合的面，致使$V-E+F$增加1(这就把开多面体变成了闭多面体)。

欧米伽：“完善多边形”？

泽塔：我所谓“完善”多边形是指能从单个顶点这样做成的多边形：先给它拼上$n-1$个棱，保持$V-E$不变；然后拼上最后一个实现闭合的棱，致使$V-E$减少1。

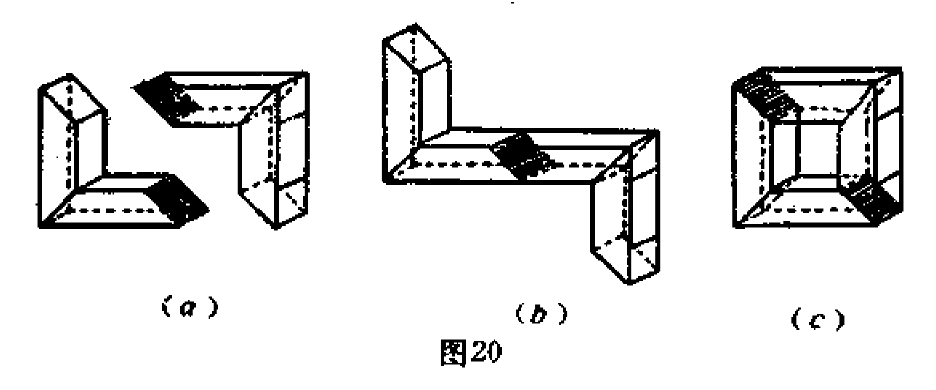
欧米伽：你的闭正规多面体会不会跟我们的哥西多面体重合噢？

泽塔：我现在不想深谈。

(d) 用演绎推测来增加内容

教师：预备知识够了。让我们看看你如何演绎吧。

泽塔：遵命，老师。取两个闭正规多面体(图20(a))，沿一条多边形环道贴在一起，让挨拢的那两面消失(图 20(b))。既然对于两多面体 $V-E+F=4$，在联成的多面体里失去两面就恰好使欧拉公式复原——有了哥西证明之后这不足为怪，因为新多面体也是很容易吹胀成一只球的。可见，欧拉公式完全经得起这个粘贴检验。现在来试一试双重的粘贴检验，把两个多面体沿两条多边形环道"贴"在一起(图20(c))。于是有四面消失，因而对于新多面体 $V-E+F=0$。



(a)　　(b)　　(c)

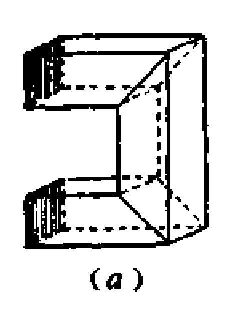
图20

伽马：这还是阿尔发的反例4，还是画框嘛！

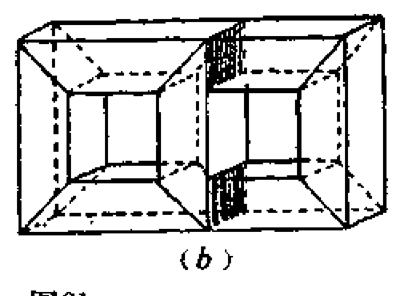
泽塔：现在，只要我再作一次"双重粘贴"，给这个画框(图20(c))贴上另一正规多面体(图 21(a))，$V-E+F$就成了 -2 (图21(b))……

西格马：对于单球性多面体 $V-E+F=2$，对于二球性多面体$V-E+F=0$，对于三球性多面体$V-E+F=-2$，对于 n 球性多面体$V-E+F=2-2(n-1)$……

泽塔：……新猜想就此到了诸位手里，内容空前，证明到家，



(a)



(b)

图21

一张表也没编过吧?①

西格马:这真妙极了。你非但解释了顽固不化的画框,还炮制了种类无穷的新颖反例……

泽塔:都解释到家了。

罗:我刚才用不同的办法得到了同样的结果。泽塔是从两个欧拉性的例子入手,经过受控实验,变出一个反例。我是从一个反例入手变出一个例子。我拿画框作如下的思想实验:"假定多面体是某种易切割物做的,如象软粘土。从坑道拉一根线过去,然后穿出粘土。多面体不会崩塌……"② 可是变了,成为一个司空见惯的简单或球性多面体了。不错,面数增加了2,棱数和顶点数各增加 m;但是,由于我们知道简单多面体的欧拉示性数是2,原多面体倒必定是有示性数0了。现在,如果需要作次数更多的切割,比方说 n次,多面体才能化为简单的,那么它的示性数就该是 $2-2n$。

西格马:这才有趣哩。泽塔已经向我们道破,证明不一定要以猜想为序幕,尽可从已知为真的命题出发,直接设计某种综合,也就是证明性思想实验。如今罗又道破,甚至检验也不一定要以猜想为序幕,尽可佯装结果已然在握,着手设计某种分析,

① 这是拉什希[1891]做的。

② 霍珀[1879],第102页。

也就是检验性思想实验。①

欧米伽：不论你选哪一种妙法，解释不了的多面体仍旧多如牛毛！按你的新定理，所有多面体的 $V-E+F$ 都是小于2 的偶数。可是，也有多面体的欧拉示性数是奇数，我们见得可不算少。瞧瞧饰顶立方体吧(图12)，它就有 $V-E+F=3$……

泽塔：我从来就没说过我的定理适用于所有多面体。它只适用于按我的作图法做成的所有n球性多面体。按原貌，我的作图法是得不出环形面的。

欧米伽：我说中了吧？

西格马：我知道啦！把这种作图法推广到有环形面的多面体是做得到的。在适当的证明生成的多边形系统里删去一个棱不致减少面数，我们尽可用这种删法造出环状多边形（图22(a)和22(b)）。我疑心，说不定也有造法与我们的证明相符的“正规”

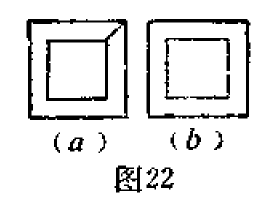


图22

多边形系统，哪怕从中删去的棱不只一个，也可以不减少面数……

伽马：这倒不假。瞧这个“正规”多边形系统(图 23(a))。你把两个棱都删去，面数也不会减少(图 23(b))。

西格马：好啊！可见，统言之，对于 n 球性或 n 连通多面

① 这又是帕普斯助探论的一部分。他把以猜想为序幕的分析叫做“理论的”，把不以猜想为序幕的分析叫做“悬疑的”（希斯[1925]，第1卷，第138 页）。前者涉及证明题，后者涉及求解题。也参见波亚[1945]，第129—136页（“帕普斯”）和第197—204页（“倒着干”）。

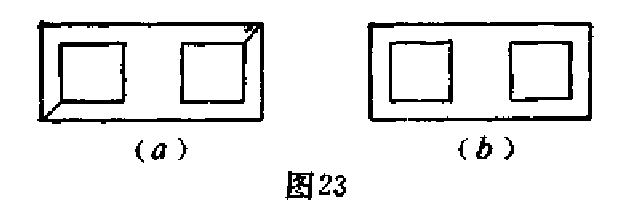


图23

体，如果删去其e_k个棱不致减少面数，那么

$$V-E+F=2-2(n-1)+\sum_{k=1}^{F}e_k$$

倍塔：这个公式解释得了阿尔发的饰顶立方体（图12）。那是只有一个环形面的单球性多面体（$n=1$），除了e_6是1，别的e_k都是零，换言之$\sum_{k=1}^{F}e_k=1$，因此$V-E+F=3$。

西格马：它也解释得了你惊呼“好不合理”的那个欧拉异想体，那个有两个环形面和一条坑道的立方体（图16）。它是2球性多面体（$n=2$），同时$\sum_{k=1}^{F}e_k=2$。因此，它的欧拉示性数是$V-E+F=2-2+2=2$。多面体世界又恢复道德秩序啦。①

欧米伽：有空穴的多面体是怎么回事呢？

---

① 恢复“秩序”得力于吕里埃，他用了几乎一样的公式（[1812—1813a]，第189页）；也得力于赫塞尔，他用臃肿的顾此失彼的公式来讲欧拉多面体的不同拼法（[1832]，第19—20页）。参见第77页注①。

从历史上说，吕里埃在[1812—1813a]里曾经尽力用朴素推测把欧拉公式加以概括，并得到以下公式：$V-E+F=2[(C-T+1)+(p_1+p_2+\cdots)]$，这里$C$是空穴数，$T$是坑道数，$p_i$是第$i$面上的内隐多边形数。只涉及“内隐多边形”时，他还给了证明，但坑道似乎就把他打败了。他造这个公式是企图解释他的三种“例外”；可是他的清单有遗漏（参见第27页注②）。何况有遗漏还不是他的朴素猜想假的唯一理由，因为他失察的可能性甚多：空穴也许是多连通的；在有分岔坑道体系的多面体中坑道数也许无法单义决定；要紧的不是“内隐多边形数”而是环形面数（对共有一棱的两个邻接内隐多边形来说，他的公式会垮台）。吕里埃的“归纳概括”受到的批评，见李斯丁[1861]，第98—99页。也参见第108页注①。

西格马：我知道！对这类多面体，应当把各不连通面的欧拉示性数加在一起：

$$V-E+F=\sum_{j=1}^{K}\left\{2-2(n_j-1)+\sum_{k=1}^{F}e_{kj}\right\}。$$

倍塔：还有孪生四面体呢？

西格马：我知道！……

伽马：你这种准确性有什么用啊！尽是些个自命不凡的雕虫小技，别这么滔滔不绝啦！①

阿尔发：凭什么不许人家往下讲？莫非孪生四面体是怪物而非真正的多面体？孪生四面体跟你的柱子一样是多面体，决不更坏！你不也钟情于语言的准确性么，为什么要对这种新的准确性大肆嘲笑呢？我们理应使定理包罗一切多面体，而使它准确正是在使它的内容增加，不是减少。这一回准确是优点啦！

卡帕：烦死人的优点跟烦死人的缺点一样烦死人，决不更好！况且，全然准确，你永远也做不到。到了再往下搞已经索然无味的时候，就该刹车了。

阿尔发：我不敢苟同。一开始，我们只有

（1）一个顶点是一个顶点。

我们由此演绎出了

---

① 确有不少十九世纪数学家被这类增加内容的雕虫小技搅晕了头，真的不知道如何应对才好了。有些人动用怪物除外定义，如梅比乌斯；还有一些人动用怪物校正，如霍珀。霍珀的[1879]尤其现脸。一方面，他跟许多同代人一样，巴不得有一个完备得无以复加的"广义欧拉公式"，要包罗万有。另一方面，只要碰上平淡无奇的复合物，他就畏缩不前。于是，他尽管声称自己的公式是"完备的、无所不包的"，却又昏昏然留下但书，说什么"特殊情况会使（构件的）数法大成疑问"（第103页）。言外之意，如果哪个闹别扭的多面体还能挫败他的公式的话，准是数错了它的构件，应该按正确眼光来校正这个怪物。比方说，孪生四面体的公共顶点和公共棱就一定得看两遍、数两回，非识别出每个孪生子自成一多面体不可（同上）。更多的例子，见第115页注①。

(2) 对于所有完善多边形 $V=E$。

由此又演绎出了

(3) 对于所有正规开多边形系统 $V-E+F=1$。

由此又得出了

(4) 对于所有正规闭多边形系统，即多面体，$V-E+F=2$。

由此再依次得出了

(5) 对于正规 n 球性多面体 $V-E+F=2-2(n-1)$。

(6) 对于有多连通面的正规 n 球性多面体 $V-E+F=2-2(n-1)+\sum_{k=1}^{F}e_k$。

(7) 对于有多连通面和空穴的正规 n 球性多面体 $V-E+F=\sum_{j=1}^{K}\left\{2-2(n_j-1)+\sum_{k=1}^{F}e_{kj}\right\}$。

开端平淡无奇，但这么一演绎，其中隐蔽的财富岂不是奇迹般的尽收眼底了？既然(1)无疑是真的，其余的也就必真无疑。

罗(旁白)：隐蔽的"财富"？最后那两笔财富只说明概括可以廉价到何等地步。

兰勃达：你当真以为(1)是推出其余一切的单公理么？演绎增加内容么？

阿尔发：那还用说！演绎思想实验的奇迹不正在这儿么？一旦你捉住了一点点真理，演绎就万无一失地把它扩充成一棵知识之树。① 如果演绎不增加内容，我才不会叫它演绎，而宁愿叫它"验证"。"验证与真正的论证不同，恰恰因为它是纯分析的，因为它是不结新果的。"②

兰勃达：演绎肯定不能增加内容！如果经过批评，暴露出结论要比前提丰富，我们就不得不给前提增派援兵，把隐蔽引理公诸于众。

卡帕：正是这些隐蔽引理包藏着牵强附会、或有一失的东西，彻底戳穿了演绎万无一失的神话。③

教师：关于泽塔的方法，还有别的问题吗？

(e) 逻辑反例与助探反例的对立

阿尔发：我喜欢泽塔的规则5，正象我喜欢欧米伽的规则4一样。我喜欢欧米伽的方法是因为它关心局部而非全局反例。这种反例，兰勃达原来那三条规则是不予理会的，以为它们既然在逻辑上无害，在助探论上也就没什么意思。欧米伽却在它们的刺激之下设计出了新鲜的思想实验，使我们的知识取得了真正的进展。

现在泽塔又从全局兼局部反例吸取了灵感。这种反例，从逻辑观点来看是彻头彻尾的证实，从助探观点来看则不然，因为，它们尽管是证实，却要求人们有所作为。泽塔建议把原思想

---

① 古代哲学家们毫不犹豫地把猜想从它的很平淡的推断演绎出来（例子见前文从三角形到多面体的那个综合性证明）。柏拉图认为"由一条单公理也许就足以生成一整个系统"。"按他通常的想法，单个假说本身就能结出新果，其他并用的前提在他的方法论里是不予理会的"（罗宾逊[1953]，第168页）。古代的非形式逻辑，即证明的或思想实验的或作图的逻辑，特征就在这里。我们只是事后推敲才看出它是省略式。内容有所增加只是后来才变成推论脆弱的标志，而不再是它有威力的标志。笛卡儿、康德和庞卡勒都竭力鼓吹这种古代非形式逻辑：他们都蔑视亚里士多德的形式逻辑，说它不结新果、无关紧要给打发掉了，同时又盛赞新果累累的非形式逻辑万无一失。

② 庞卡勒[1902]，第33页。

③ 十九世纪中叶在数学批评声中才开始搜捕隐蔽引理，这跟稍后证明分析取代证明、语言规律取代思维规律的过程有密切关系。逻辑理论上最重要的发展照例是以数学批评的发展为先导的。不幸的是，就连最好的逻辑史家也不免全神贯注于逻辑理论上的变化，不注意它们的根子是在逻辑实践上的变化之中。也参见第123页注①。

实验推广和变繁，使逻辑证实转化为助探证实，使逻辑上满意的实例转化为在逻辑和助探两方面都满意的实例。

欧米伽也好，泽塔也好，都是在找新观念。而兰勃达，尤其是伽马，老是迷恋语言魔术，光想对付他们的全局而非局部反例，这种反例其实无伤大雅，只是从他们那种怪僻的观点来看才有伤大雅。

帖塔：如此说来，逻辑观点是"怪僻的"观点。对吧？

阿尔发：对，你们的逻辑观点。不过，我另有一点观感，想谈一谈。不管演绎增加不增加内容——提醒诸位，当然是增加的——看来它确实能保证知识连续生长。我们从一个顶点开始，任凭知识迅猛而和谐地生长，结果解释了无论什么多面体的顶点数、棱数和面数之间的关系。这是一种无反驳的非戏剧性生长！

帖塔（朝着卡帕）：阿尔发的判断力丧失得精光了吗？谁都是从一个问题开始，不是从一个顶点开始呀！①

阿尔发：在这种步步为营但势不可当的胜利进军中，我们总有一天会到达这样的定理，"它们本身不自明，只有靠一颗洞察全局的心灵连续不断的活动，从已知的真原理演绎出来"。②靠"不怀偏私"的观察和意外闪现的顿悟是始终达不到的。

帖塔：有没有这种最终胜利，我怀疑。象这样生长，我们始终到不了柱子，因为，(1)是从一个顶点开始的，柱子一个顶点也没有。还有单侧多面体和多维多面体，也是始终达不到的。这种步步为营的连续扩充完全可能到某一处就停步不前了，那时候你就非找新的革命性起点不可了！再说，即使是这号"和平的连续运动"也充满着反驳、批评嘛！倘若不是处于全局兼局部反例

① 阿尔发看来确实滑进了演绎助探论的谬说。参见第86页注①。

② 笛卡儿[1628]，规则III。

的持续压力之下，我们又为什么从(4)转到(5)，从(5)转到(6)，从(6)转到(7)呢？兰勃达只承认全局而非局部反例是真正的反例，因为它们才暴露出定理假。欧米伽的革新见解——阿尔发表扬得很对——在于把局部而非全局反例也看成真正的反例，因为它们暴露出定理真得贫乏。如今泽塔告诉我们，连全局兼局部反例也是真正的反例，因为它们也点破了定理真得贫乏。譬如说，几种画框都是哥西定理的全局兼局部反例。仅就真实性而言，它们固然是证实。但就内容而言，便是反驳了。我们可以把头一种(全局而非局部)反例叫做逻辑反例，把其他的叫助探反例，而我们承认的逻辑或助探反驳越多，知识生长得就越快。阿尔发呢，他既把逻辑反例视为无伤大雅，又根本拒绝给助探反例以反例的称号，原因是他对他的观念着了迷，总认为数学知识的生长是连续的，批评起不了作用。

阿尔发：你把反驳概念和批评概念人为地加以扩充，不过是要给你的批判的知识生长论找理由。语言魔术也成了批判哲学家的工具么？

派：依我之见，讨论一下概念形成对分清是非或许不无帮助。

伽马：我们洗耳恭听。

8. 概 念 形 成

(a) 靠概念绷开来反驳．怪物除外的重估，兼及错误和反驳概念的重估

派：我乐于先回顾泽塔以前乃至欧米伽以前的时期，回顾定理形成的三种主要方法，即怪物除外法、例外除外法、多证多驳

法。各种方法都是以同一个朴素猜想开始，而以不同的定理和不同的理论术语告终。这种区别的某些方面，阿尔发已经大略叙述过了，但他的估计，尤其是对怪物除外法和多证多驳法的估计，不能令人满意。阿尔发以为，与朴素猜想相比，怪物除外定理“隐藏着某种本质上的改进，靠字句相同瞒住了”。他以为，德尔塔把“朴素”多面体的类逐渐收缩成一个清洗掉非欧拉怪物的类了。

伽马：这种估计有什么错？

派：不是怪物除外者收缩了概念，倒是反驳主义者扩充了概念。

德尔塔：听啊，听啊！

派：回想一下我们这个学科的首批开拓者处的时代吧。他们当时让正则多面体的美丽的对称性搞得神魂颠倒，真以为全宇宙的奥秘都装在五种正则物体里头。到摆出笛卡儿-欧拉猜想的时代，多面体概念包括一切种类的凸多面体了，甚至也包括某些凹多面体了，可是，确实还不包括非简单多面体或有环形面的多面体。就他们心目中的多面体来说，那个猜想按本义是真的，证明也是无懈可击的。①

随后，反驳主义者跑出来了。他们在批判的狂热中把多面体概念绷开了，硬要把违背原定解释的对象也包罗进来。按原定解释，猜想是真的；按反驳主义者偷运的非原定解释，它才是假的。他们的“反驳”暴露的不是原猜想的错误，不是原证明的过错，暴露的是从前没人说过或想过的某个新猜想的假。

可怜的德尔塔！他奋起保卫了多面体原有的解释。每出一个反例，他都拿一个新子句来还击，以保障原概念的安全……

伽马：可是德尔塔次次都变换了立场，不是么？每当我们造了一个新的反例，他总是把自己的定义改得更长，又亮出另

一个"隐蔽"子句！

派：这才是对怪物除外的怪鉴定哩！他只是看上去变换了立场而已。你们说他在术语上暗中兜圈子来死保他的宝贝念头，那是你们冤枉人家。他倒霉就倒在那个不吉利的定义1："多面体是由多边形面组成其表面的立体"。这个定义一下子就让反驳主义者给逮住了。可是，勒让德的本意只是要它容纳他的朴素多面体；容量远远过了头，这根本是倡议者不明白也不愿意的。从这个合乎情理、貌似单纯的定义慢慢涌现的怪内容，数学界心甘情愿咽下去了。正因为这个缘故，德尔塔才不得不一次再次结结巴巴地说"我所谓……是指……"，不得不坚持不懈地把没完没了的"默认"的子句公开。一切的一切，都是因为朴素概念从来没扣准，以致一个简单的但古怪的非原定定义就使它报废了。但是，设想另一种局面：定义正好稳稳安置了"多面体"的原定解释。那时候，就该轮到反驳主义者来设计一个比一个长的怪物收容定义了。比方说吧，他们会设计"复合多面体"的定义：

---

① 欧拉[1758a]中的图6是有史以来几何教科书上出现的第一个凹多面体。凹凸多面体，勒让德在[1809]里都谈到了。但吕里埃之前没谁提起过非简单的凹多面体。

不过，我们可以再加一层有趣的限制。最先被人研究的那类多面体大抵不出五种普通正则多面体和棱锥、棱柱这样的准正则多面体(参见欧几里得)。文艺复兴之后，这个类沿两个方向推广了。一个是正文指出的，把所有凸多面体和某些略有凹陷的简单多面体包括进来。另一个是开普勒的方向：他发明了正则的星状多面体，使正则多面体类加宽了。可是，开普勒的革新被遗忘了，只好等庞索特重来一次。星状多面体，欧拉的确是做梦也没想到过。哥西知道，但他的心奇怪地隔成两半。他对星状多面体起了一个有趣的念头的时候，就发表了：而他介绍自己一般的多面体定理有哪些反例的时候，又不理会星状多面体了。年轻的庞索特不是如此([1810])，后来偏偏又改变了想法。

由此可见，派的说法虽然在助探论上是对的(就是说，在合乎理性的数学史中是真的)，在历史上却是假的。(不必为此发愁，实际历史往往是按理性再造的历史的漫画化。)

“复合多面体是一组(真正的)多面体，由叠合面两两相焊接”，而“复合多面体的面又可以是复合多边形，后者是一组(真正的)多边形，以叠合棱两两相焊接”。这种复合多面体于是就跟阿尔发和伽马的反驳生成的多面体概念正相当，因为，第一个定义容许有非简单多面体，第二个容许有非单连通面。可见，设计新定义未必是怪物除外者或概念保存者的差事，也可以是怪物收容者或概念绷开者的差事。①

西格马：照这么说，概念和定义——就是说，原定的概念和非原定的定义——可能玩起互相作弄的鬼把戏！我从来没梦想到，概念形成居然会磨磨蹭蹭，落在宽得超过原意的定义后头！

派：会的。怪物除外者只不过是在坚守原概念，概念绷开者把它加宽了。妙在概念绷开是悄悄干的，人人心中无数。既然人人的“坐标系”都随着概念加宽而扩充了，他们就不免要当怪物除外把概念弄窄这种助探论幻觉的俘虏，其实呢，这才是保持概念不变。

德尔塔：看吧，是谁做学问不诚实？是谁在暗中改变立场？

伽马：我承认，我们控告德尔塔暗中收缩他的多面体概念，算是告错了。他那六个定义统统是指同一个祖传老牌多面体概念。他是把这同一个贫乏的概念放在越来越丰富的理论参考框架或语言里反复定义，就是说，怪物除外不是在形成概念，只是在翻译定义。怪物除外定理对朴素猜想毫无改进。

德尔塔：你的意思是说我那些定义统统是逻辑上等价的？

伽马：那得看你的逻辑理论怎么样了。按我的理论，当然不等价。

德尔塔：这个回答并不很管用，你会承认的。不过，你还

① 怪物收容定义的趣例是庞索特给凸性重下的定义。经他一定义，星状多面体也成了可敬的凸正则物体的一员。

是告诉我，你驳倒了朴素猜想吗？你只是靠暗地里歪曲它原有的解释才驳倒它的！

伽马：对呀，我们正是按你向来梦想不到的某种更富于想象和更有趣的解释来驳倒它的。要不是这样，仅仅暴露一个愚蠢过错的反驳同堪称知识生长中的大事的反驳也就没法子区别了。假使你因为数不清数而误认为“对于所有多面体 $V-E+F=1$”，我就是纠正了你的错，也不甘自称这是什么“反驳”的。

倍塔：伽马言之有理。派揭发了隐情之后，再把我们那些“反例”叫做逻辑反例，也许就要煞费踌躇了；因为按猜想的原定解释，它们跟猜想无论如何不是不一致的；不过，它们确实还是助探反例，因为它们在鼓动知识生长。假使我们过去接受了德尔塔那种狭隘的逻辑，知识就生长不了。姑且假设有那么个拘泥于狭隘概念框架的人发现了欧拉猜想的哥西证明。他觉得在任何多面体上这个思想实验步步都容易行通。在他眼里，“所有多面体都是简单的”、“所有面都是单连通的”这些“事实”显而易见、毋庸置疑。他永远不会想到，该把他的“显而易见”的引理变成某个改进了的猜想中的条件，从而建成一个定理。原因是反例才显得出“真得平淡”的引理是假的，而反例的刺激不见了。于是乎，他以为哥西证明无疑是牢牢树立了朴素猜想，其确实性容不得半点怀疑了。可是，他那种“确实性”远远不是成功的标志，倒只是想象力不足、概念贫乏的症状。这造成自鸣得意的满足，有碍知识生长。①

(b) 证明生成的概念与朴素概念的对立，理论分类与朴素分类的对立

派：让我重新谈谈证明生成的定理：“所有带单连通面的简

① 其实，哥西便是如此。假使哥西那时已经发现了他的革命性的例外除外法，他八成会搜索例外，也会找着的。大概只是稍后，他下决心清除分析中的混乱的时候，他才遇到了例外问题。（似乎是吕里埃最先察觉和正视了一个事实：这样的"混乱"并不限于分析。）

历史学家照例说，哥西察觉了他的定理不是普遍有效的，所以只就凸多面体加以陈述，例如施坦尼茨在[1914—1931]里就是这么说的。不错，哥西在他的证明里是用了"多面体的凸表面"一语（[1813a]，第81页），他在[1813b]里也是在"立体角与凸多面体的若干定理"这个总标题之下复述欧拉定理的。可是，大概正是想抵销这个标题，他特地强调了欧拉定理对任何多面体普遍有效（定理XI，第94页），而把另外三个定理（定理XIII及其两个系理）明确针对凸多面体来陈述（第96页和第98页）。

为什么哥西用语轻忽？哥西的多面体概念与凸多面体概念几乎重合，而又不尽重合。在凸多面体一侧轻轻按一下就能得到的凹多面体，哥西是知道的。但是，凡与进一步证实——而不是反驳——他的定理似乎无关的东西，他都没有讨论。（作为概念生长的触发剂，证实永远不能跟反例乃至例外相比。）哥西谨慎地用了"凸"字的缘故就在这里：他是对凹多面体坦可能有反例不甚了了，不是为消除反例才刻意求精。就在这同一段话里，他论证了欧拉定理是"对于平的多边形网络 $V-E+F=1$"这条引理的"直接推断"，他还说过"各多边形在同一平面上还是在不同平面上，对 $V-E+F=1$ 的有效性并不打紧，因为定理只涉及多边形数及其构件数"（第81页）。这个论证，在哥西的狭隘概念框架内正确之极，在更宽的框架内却不正确，比方说，如果"多面体"也可以指画框的话。十九世纪前半期，这个论据屡屡有人重复（例如奥利维尔[1826]，第230页；或格龙奈特[1827]，第367页；或巴采尔[1860—1862]，第2卷，第207页）。贝克尔提出过批评（[1869a]，第68页）。

依常例，只要靠概念绷开驳倒了一个命题，被驳倒的命题似乎立刻就成了如此初等的过错，简直无法想象伟大的数学家会出这种错。概念绷开式反驳的这个重要特征，能够解释谦恭的历史学家们为什么——因为不理解概念在生长——给自己造出一大堆扑朔迷离的问题。为了拯救哥西，谦恭的历史学家们声称他"决不可能遗漏"非简单多面体，所以他"断然"（！）将定理限制到凸多面体这个范围。但拯救出来之后，他们又不得不解释哥西画的界线何以窄得"无谓"。为什么他没有理会非凸的欧拉多面体呢？施坦尼茨的解释是：正确表述欧拉定理要借助于表面的连通性。既然在哥西时期尚未"清楚掌握"这个概念，那么"最简单的出路"就是假定凸性（第20页）。就这样，施坦尼茨把哥西从来没犯的一个过错给解解掉了。

别的历史学家另有一套招数。据他们说，到达正确的概念框架（也就是他们知道的那个框架）的一刹那之前，只有一个"黑暗年代"，"不说是没有，也是几乎没有健全的"结果。多面体理论的那一刹那，据勒贝格说（[1923]，第59—60页）是约当证明[1866a]，据贝尔说（[1945]，第460页）是庞卡勒证明[1895]。

单多面体都是欧拉的”。这种表述是要引起误会的，该说“所有带单连通面的简单对象都是欧拉的”才对。

伽马：为什么？

派：前面这种表述是说，定理中出现的简单多面体类是朴素猜想中的“多面体”类的子类。

西格马：简单多面体类当然是多面体的子类嘛！“简单多面体”概念把多面体限制到了我们证明里的第一引理行得通的那一部分，就使原来那个宽的多面体类收缩了。“带单连通面的简单多面体”这个概念标志着原来那个类又进一步收缩了……

派：原来那个多面体类就是只包含简单的、带单连通面的多面体的。欧米伽过去说引理并入减少了内容，他搞错了。

欧米伽：每并入一条引理不都排除了一个反例吗？

派：当然是的，但这是靠概念绷开炮制出来的反例。

欧米伽：那么，引理并入是在保存内容，跟怪物除外毫无二致喽？

派：不对。引理并入是在增加内容，怪物除外不是。

欧米伽：什么？你真要我们相信，引理并入不但不减少内容，还增加内容吗？不是在收缩概念，倒是在绷开概念吗？

派：一点不错。听听看吧。一个地球仪，上面画了一幅政治地图，它是原来那个多面体类的元素吗？

欧米伽：当然不是。

派：可是，有了哥西证明之后，它就变成元素了。因为，你可以毫无障碍地在它上面做通哥西证明，只要它上面没有环形的国家或海。①

伽马：说得对啊！把多面体吹胀成一只球，把棱和面扭弯，

---

① 参见第37页注①。

丝毫不会妨碍我们做通哥西证明，只要扭弯之后顶点数、棱数和面数不改变。

西格马：我明白你的意思了。照这么说，证明生成的"简单多面体"概念不仅是朴素的"多面体"概念的收缩、限定，也是它的扩充、概括。① 有哥西证明之前，任何人都很难起念把多面体概念概括到这种地步，连起了皱纹的带弯曲面的曲线"多面体"也收容进来；就算起过念吧，也会被斥为怪僻给打发掉的。现在这可是一种自然而然的概括了，因为我们证明中的道道手术对这些多面体都解释得通，跟棱是笔直的、面是平坦的普通朴素多面体没什么两样。②

派：说得好。不过，你还得多迈一步才行。证明生成的概念既不是朴素概念的"限定"又不是它的"概括"。种种的证明、频频的反驳给朴素概念造成的革命性的影响远远不止于此，简

---

① 达尔布在[1874a]里差不多有了这种想法。稍后庞卡勒就讲得很清楚了："……数学是以同名概异物的艺术……如果语言选得好，我们会惊诧不已地发现，给特定对象作的一切证明可以立即转用于许多新的对象；一切都不用改，连用词也不用改，因为它们的名称已经变成一样的了"([1908]，第375页)。弗雷歇称这种做法为"极端有用的概括原则"，表述如下："在证明有关某数学对象的某命题时，如果所用该对象的一组性质并没有把该对象决定下来，这个命题便可以推广，应用于更一般的对象"([1928]，第18页)。他指出，这样的概括不是平淡无奇的，"也许非花大气力不可"(同上)。

② 哥西并没有注意到这一点。从一个重要的方面说，他的证明与本书教师所给的证明是不同的，这就是哥西在[1813a]和[1813b]里没有把多面体想象成橡皮做的。他的证明计谋的新意在于把多面体想象成一个曲面，不再象欧几里得、欧拉和勒让德似的想象成一个立体了。但他还是把它想象成一个固体的曲面。当他移走一面，把剩下的空间多边形网络映射成平的多边形网络时，他并没有把他的映射看成绷开，也许要使面和棱变弯的。最先察觉哥西证明在有弯面的多面体上也行得通的数学家是克瑞勒([1826—1827]，第671—672页)，但他依旧小心翼翼不丢掉直棱。然而，对于凯利，似乎"一眼"就能识破，"即使允许棱是弯曲的线，这个理论也不会有实质上的改变"([1861]，第425页)。独立得出同样见解的，在德国是李斯丁([1861]，第99页)，在法国是约当([1866a]，第39页)。

直是把关键的朴素概念一笔抹煞，用证明生成的概念取而代之了。① 朴素术语“多面体”，哪怕是被反驳主义者绷开之后，也还是指某种结晶体似的东西，指面是“平平”的、棱是直直的立体。各种证明计谋却一口吞食了这个朴素概念，把它消化得精光。在各种证明生成的不同定理里，我们根本不跟朴素概念打交道了。它消失得无影无踪了。每一种证明倒是产生了体现自身特征的证明生成的概念，指的是可绷开、可吹胀、可拍摄、可投影和诸如此类的性质。老问题荡然无存，新问题脱颖而出。在哥伦布之后，如果人们没有解决他们所求解的问题，那是不该吃惊的。

西格马：总之，欧拉猜想的“朴素”产地“立体论”算是冰消瓦解了。猜想脱胎换骨之后重新出场。如果它是由日果内证明的，便进入射影几何；如果是由哥西证明的，便进入解析拓扑；如果是由庞卡勒证明的，便进入代数拓扑……

派：太对了。现在你总懂得了，为什么我不象阿尔发或倍塔那样，把各个定理表述成“所有日果内多面体都是欧拉的”、“所有哥西多面体都是欧拉的”等等，而宁可表述成“所有日果内对象都是欧拉的”、“所有哥西对象都是欧拉的”等等。所以，我觉得，不仅为朴素概念的精确与否争执不休是没什么意思的，为朴素猜想的真假争执不休也是没什么意思的。

---

① 这种概念形成论是把概念形成嫁给证明和反驳。波亚则是把它嫁给了观察。“物理学家们开始谈‘电气’，或者医生们开始谈‘传病’的时候，这些术语是含混的、朦胧的、糊里糊涂的。今天科学家所用的术语，如象‘电荷’、‘电流’、‘细菌传染’、‘病毒传染’，就比较清晰、比较确切，不可相提并论了。可是，两套术语的更替经过了为数何等惊人的观察、多少别出心裁的实验啊，其间也有过某些伟大发现呢。归纳改变了术语，澄清了概念。整个过程的这一面，即如何用归纳来澄清概念，我们也能从数学里举出适当的例证”（[1954]，第1卷，第55页）。这种归纳主义概念形成论尽管是错的，也比硬说概念形成是自律的，说概念的“澄清”或“精释”是任何科学讨论的预备阶段，要可取一点。

倍塔：不用得了宠的证明生成的术语，比方“哥西对象”之类，而沿用“多面体”这个术语，岂不也行吗？

派：悉听尊便，不过要记住你的术语不再指它原想指的东西了。它的朴素意义已经荡然无存，现在你是用它……

倍塔：……指一个更一般的改进了的概念！

帖塔：不对！指一个截然不同的崭新的概念。

西格马：我认为你们的看法是悖理的！

派：如果你所谓悖理是指“尚未得到公认的意见”①，可能跟你的某些根深蒂固的朴素观念不一致，那也无所谓，反正你非把你的朴素观念换成悖理的观念不可。这未尝不是“解决”悖论的一种办法。不过，你心里想的到底是我的哪个具体看法呢？

西格马：你还记得，我们曾经发现，有些星状多面体是欧拉的，另一些不是。我们曾经想找一个证明，要深刻到足以解释普通多面体与星状多面体两者的欧拉性……

易卜西隆：证明就在我手里。

西格马：我知道。但是，为了便于辩论，我们就设想没有这样的证明，设想除了“普通”欧拉多面体的哥西证明之外，有人又给星状欧拉多面体提出了一种相应的但根本不同的证明。那时候，派，你会因为有这两种不同的证明，就主张把我们原先归入一类的东西劈成两类么？两样迥然不同的东西，有人给它们的某些性质找出了共同的解释，你又会只因为这一点就把它们统一在同一名称之下么？

派：当然会。我可决不会把鲸叫鱼，把收音机叫闹箱（土人也许会吧）；我听见物理学家称玻璃为液体，也不觉得别扭。的确，知识进步了，朴素分类就被理论分类取而代之，就是说，较

① 霍布斯[1656]，对主教第xxi条答复的批驳。

理论生成的(证明生成的，或者说解释生成的，悉听尊便吧)分类取而代之。猜想也好，概念也好，都不得不通过证明和反驳这个涤罪所。从多证多驳法生长出来的改进了的猜想(定理)和概念（证明生成的概念或理论概念)使朴素猜想和朴素概念报废。而随着理论思想和概念使朴素思想和概念报废，理论语言也就使朴素语言报废了。①

欧米伽：到头来，我们总会从朴素的、偶然的、纯名义的

---

① 从相当朴素的多面体分类到高度理论的分类经历了一个渐变，巡视一下这个过程倒是挺有趣的。头一个不再只容纳简单多面体的朴素分类出自吕里埃之手，是按空穴、坑道和“内隐多边形”的数目作的分类(见第 93 页注①)。

(a) 空穴。欧拉的第一个证明，顺便说说，还有吕里埃自己的证明（[1812—1813a]，第174—177页)，靠的是分解立体，要么把它的角一个一个切掉，要么从内部的一点或几点把它分解成棱锥体。然而，哥西证明——吕里埃并不知道有这回事——则是靠分解多面形曲面。等到多面形曲面论使多面形立体论最终报废之后，空穴便索然无味了，因为一个“有空穴的多面体”变成了一整组多面体。这么一来，我们那个老牌怪物除外定义 2 变成证明生成的理论定义了，“空穴” 这个分类学概念从生长的主流中消失了。

(b) 坑道。李斯丁早已指出过这个概念不能令人满意（见第 93 页注①)。它之被取代，卡尔纳普派的学者也许不免要料定，是由于给“坑道”这个“含混”概念作了某种 “精释”吧。其实是由于人们试图去证明和反驳吕里埃就有坑道多面体的欧拉示性数提出的朴素猜想。在这个过程中，有 n 条坑道的多面体概念消失了，证明生成的“多连通性”(也就是我们所说的“n 球性”）篡了位。我们发现，某些文章还在沿用这个朴素术语来指证明生成的新概念，例如霍珀就把 “坑道” 数定义成使多面体保存连通性所需切割的数目（[1879]，第 102 页)。在施坦尼茨看来，坑道概念在理论上已经如此稳固，他无法找出，吕里埃按坑道数作的朴素分类与证明生成的按多连通性作的分类有什么“本质上的”区别；所以，他认为李斯丁对吕里埃分类的批评“极不公正”([1914—1931]，第22页)。

(c) “内隐多边形”。这个朴素概念也是转瞬即逝，先被环形面取代，随后又被多连通面取代(也参见第94页注①)。(是取代而非“精释”，因为“环形面”肯定不是“内隐多边形”的精释。）然而，多面形曲面论一则被拓扑曲面论、二则被图论报废了，这时，多连通面如何影响多面体欧拉示性数的问题也就一点趣味都没有了。

可见，第一个朴素分类的三个关键概念当中只有一个“幸存”，就连这一个也已改观，难以识别了——广义欧拉公式暂时被归结为$V-E+F=2-2n$了。(关于更进一步的发展，参见第 105 页注②)。

分类到达最终的、真的、实在的分类，到达尽善尽美的语言嘛！①

(c) 逻辑反驳与助探反驳复议

派：让我重提有关演绎推测引起过争议的某些话题。先看助探反例与逻辑反例对立的问题，这是在阿尔发和帖塔的讨论中提出来的。

我想，我讲的道理已经说明，连所谓"逻辑"反例也是助探反例。按原定解释，(a)所有多面体都是欧拉的，与(b)画框不是欧拉的，并没有什么不一致。

如果我们抱定原语言默认了的语义规则，我们举的反例都不是反例。靠概念绷开改变了语言规则，它们才转化为逻辑反例。

伽马：你的意思是说一切有趣的反例全是助探反例么？

派：一点不错。一头是证明和反驳，另一头是概念、分类、语言框架上起的变化，你想把二者隔离是做不到的。举出一个"反例"之后，你照例得作某种选择：要么你就拒绝为它烦心，因为在你的给定语言 L_1 中它压根儿算不上反例；要么你就同意以概念绷开来改变你的语言，在你的新语言 L_2 中接受这个反例……

泽塔：……然后在L_3中解释这个反例！

派：按传统的静态合理性，你只能作前一种选择。科学却教你作后一种。

---

① 就朴素分类而言，唯名论者接近真理，据他们说各种多面体唯一的共同点就是它们的名称。可是，经过几个世纪的证明和反驳之后，随着多面体理论向前发展，理论分类取代了朴素分类，天平就倾向于唯实论者了。共相问题应当重新考虑，要着眼于知识在生长、语言在变化。

伽马：这就是说，我们可能有两个陈述，在L_1中原是一致的，但我们转到了L_2，它们在其中却不一致了。或者，我们可能有两个陈述，在L_1中原是不一致的，但我们转到了L_2，它们在其中却一致了。知识在生长，语言也随之起变化。“每个创造时期同时是个语言变化时期。”① 在任何给定的语言中都不能模拟知识的生长。

派：说对了。助探论过问的是语言动力学，逻辑过问的是语言静力学。

(d) 理论的概念绷开与朴素的概念绷开的对立，连续的生长与批判的生长的对立

伽马：演绎推测是不是提供了连续的知识生长模式呢？你答应过要重新谈谈这个问题的。

派：演绎推测的助探模式可能取多种历史形态，我先给其中几种勾个轮廓吧。

第一大模式是朴素的概念绷开远远跑在理论前头，炮制出了一大堆混乱的反例。朴素概念松散了，而又没有理论概念来替代。在这种情况下，既有成批反例作备用柴，演绎推测可以一阵又一阵地燃烧起来。假使你喜欢这么叫，这便是连续的“概括”模式。不过，别忘了，它是从反驳开始的，它的连续性在于

① 菲利克斯[1957]，第10页。据逻辑实证主义者说，哲学的唯一任务就是构造表现科学的人工冻结状态的“形式化”语言（见本书作者引言中摘录的卡尔纳普的话）。可是，在科学的疾速生长勾销掉老的“语言系统”之前，这样的研究是几乎无法进行的。科学教我们别崇奉任何给定的概念-语言框架，免得它变成概念囚笼。语言分析学家却有一种至少想延缓这个过程的藏而不露的兴致，目的是要说明他们邪塞语言治疗术是正当的，就是说，要显示自己对科学有极其重要的反馈和价值，并没有蜕化为“干巴巴的小古板”（爱因斯坦[1953]）。波普尔曾经对逻辑实证主义提出类似的批评，例如见他的[1959]，第128页，脚注*3。

用一个生长着的理论把它的初版已有的助探反驳一批接一批地解释掉。

伽马：换言之，“连续的”生长只表示反驳在它背后好几英里的地方摆着哩！

派：说得对。但是，也有可能，每反驳一次，或者说朴素概念每扩充一次，理论(和理论概念)紧跟着就扩充一次，就把反例给解释掉了。这时候，“连续性”便让位给一种激动人心的过程，成了概念绷开式的反驳与越来越有力的理论交相更替、朴素的概念绷开与解释性理论的概念绷开交相更替。

西格马：这是同一纯种助探模式上的两种偶然的历史变异嘛！

派：对啦，它们其实没多大区别。无论在哪一种里，理论的力量都在于有本领在生长过程中把碰到的反驳解释掉。不过，演绎推测还有第二大模式……

西格马：又是一种偶然的变异么？

派：是的，假使你喜欢这么叫的话。然而，一发生这种变异，正在生长的理论就不只是在解释，而且是在炮制对自身的反驳了。

西格马：什么？

派：在这种情况下，理论的生长超出了——说实在的，是消除了——朴素的概念绷开。譬如说，某人一开始就有了哥西定理，地平线上连一个反例也没有。这时候，他为了检验定理，想尽办法让多面体变形，比方说，一切为二，切掉棱锥角、弄拱、扭弯、吹胀……这些检验计谋当中，有些会通向证明计谋①(先得出已知为真的某种东西，而后倒过来做，也就是遵循帕普

① 波亚区分“简单的”和“苛刻的”检验。“苛刻的”检验也许会“初步暗示出一个证明”([1954]，第1卷，第34—40页)。

斯的分析-综合模式），但也有一些，象泽塔的“双重粘贴检验”那样，不是把人引回已知的东西，而是把人引向了真正的新鲜事物，引出了对被检验命题的某种助探反驳，不过，靠的不是推广朴素概念，而是推广理论框架。这种反驳自己就能解释自己……

艾欧塔：多么辩证啊！检验转化为证明，反例因其构造方法本身一变而为例子……

派：辩证在哪里？一个命题的检验转化为另一个更深刻的命题的证明，前者的反例一变而为后者的例子。为什么把混淆叫辩证呢？还是言归正传吧，我的演绎推测第二大模式，阿尔发准会看成知识的连续生长，我可不认为能那么看。

阿尔发：当然能。拿我们这种方法跟欧米伽的主意比一比嘛，他的主意是把一个证明计谋换成根本不同的更为深刻的计谋。这两种方法都在增加内容。但是，按欧米伽的方法，证明中适用范围窄的手术换成了适用范围较宽的手术，或者更彻底，整个证明换成了适用范围较宽的证明。演绎推测只是补充上加宽适用范围的手术来推广给定证明。这不就是连续性吗？

西格马：说得对！我们从定理演绎出了一连串定理，一个比一个宽！从特殊情况到了越来越一般的情况！靠演绎作了概括！①

派：但是充满了反例！任何一点内容上的增加，任何一个更深刻的证明，要么尾随要么生成对原先较贫乏的定理的种种助探反驳，一旦你认清了这种情况……

---

① “在数学里简直是司空见惯的事情，在初学者看来，或者在自命高深的哲学家看来，却依然是如此令人吃惊，那就是一般情况可以在逻辑上等值于特殊情况”（坡亚[1954]，第1卷，第17页），这话在非形式逻辑里没一点错。也参见庞卡勒[1902]，第31—33页。

阿尔发：蛸䗖已经扩充了"反例"概念，把助探反例罗致在内了。你现在又扩充，连从来不曾实际存在的助探反例也给罗致进来了。你所谓"第二大模式"充满反例的空话，其根据不外是把反例概念扩充到存活期等于零、发现之日便是解释之时的反例罢了。凭什么说，一切智力活动都是"批判的"，就是在统一框架内为增加内容而作的斗争也无一不是"批判的"？你这种教条主义的"批判态度"把是非界线搞得模糊不清！

教师：你跟派之间的是非界线确实模糊不清，因为你的"连续生长"跟派的"批判生长"完全一致。我倒对演绎推测或"连续批判"的局限性更感兴趣，如果它有局限性的话。

(e) 内容增加的极限．理论反驳与朴素反驳的对立

派：我认为，"连续"生长注定了迟早要寿终正寝，迟早要到达理论的饱和点。

伽马：可是，不论什么时候，我准能把某些概念绷开呀！

派：那是当然。朴素的概念绷开尽可持续下去，可是理论的概念绷开是有极限的！由朴素的概念绷开而来的反驳只不过是些牛虻，叮得人心烦意乱，就用理论的概念绷开去捉它们。可见，反驳有两种。头一种是由于巧合，由于运气好，或者由于随心所欲扩充某个概念，让我们给偶尔撞上了的。它们象奇迹，它们的"反常"性状还没有得到解释；我们承认它们是纯正的反例，只是因为承认概念绷开式的批评在我们是习以为常的。这种玩意儿，我要叫朴素反例或非非之想。其次，还有理论反例。这些反例，要么本来就是由证明绷开炮制出来的，要么原先是非非之想，被绷大了的证明抓住了，解释掉了，结果提拔到理论反例的高位之上了。看待非非之想还是得多多存疑才对，说

不定它们并不是真正的反例，而是某种大不一样的理论的实例，如果不是明摆着错了的话。

西格马：万一我们碰了壁，如何是好？万一我们想扩充原证明来把朴素反例变成理论反例，却无法做到呢？

派：我们不妨再三试验，看看自己的理论是不是还有某种隐蔽的生长能力。然而，有时候，我们有十足的理由洗手不干。比方说，帖塔曾经指出，如果演绎推测是从一个顶点开始的，就切不可指望它解释得了无顶点的柱子。

阿尔发：可见，柱子虽非怪物，毕竟只是非非之想嘛！

帖塔：非非之想也不可小看嘛！非非之想是真正的反驳。它们塞不进连续"概括"的模式，也许倒真会强迫我们对自己的理论框架来一次革命……①

欧米伽：妙啊！人们也许会达到某一串演绎推测的相对饱和点，但随后又找出一种革命的、新颖的、更深刻的证明计谋，它的解释力更强。到头来，还是能达到一种最终的证明，没有极限，没有饱和点，没有非非之想能把它驳倒！

派：什么？单靠一个统一理论就解释得了宇宙间的一切现象？永远休想！我们迟早会逼近象绝对饱和点那样的东西。

伽马：老实说，会不会我都无所谓。一个反例要是只用给证明作点廉价的平淡的推广就解释掉了，在我看，它已经该算非非之想了。再说一遍：我实在看不出有必要把"多面体"概括到能收容有空穴的多面体；这不是一个多面体，是一组多面体。

---

① 凯利[1861]和李斯丁[1861]认真对待多面体理论基本概念的绷开。凯利把棱定义为"从一顶点到它自身或任何别的顶点的路"，但又允许棱蜕化成无顶点的闭曲线，称后者为"圈线"（第426页）。李斯丁有一术语指各种棱，不论其顶点是两个、一个还是零个，这就是"线"（第104页）。两个人都明白，在他们宽大为怀的概念框架里变得顺乎天理的"非非之想"，还需要有崭新的理论才解释得了。凯利发明了"闭图形分类理论"，现代拓扑学伟大先驱之一的李斯丁发明了"空间复形详考"。

"多连通面"，我也宁肯忘掉拉倒；干吗不把失踪了的对角线画上呢？至于那个想收容李生四面体的概括，我巴不得给它一枪；它唯一的目的就是毫无目的地制造复杂不堪、自命不凡的公式而已。

罗：你终于重新发现我的怪物校正法啦！你就得靠它才能幸免于浅薄的概括。欧米伽不该把内容叫做"深度"；不能说任何内容上的增加都是深度上的增加，想想(6)和(7)吧！①

阿尔发：这么说，我那串公式里，你想到了(5)就收场么？

伽马：是的。(6)和(7)不是生长，倒是蜕化！与其接着走向(6)和(7)，我宁可找个扣人心弦的新反例来解释！②

阿尔发：也许还是你说对了。不过，谁来裁决到哪儿该收

---

① 相当多的数学家分不清什么平淡、什么不平淡。如果既木然不识要领，又幻想能造完备得无以复加的公式将一切可思议的特例都囊括在内，这就格外狼狈(参见第94页注①)。这样的数学家可以为"最终"完成某公式的概括苦干多年，临了也只作了几处无足道哉的改正，算是推广。杰出的数学家贝克尔就是个可笑的例子。他苦干多年之后，炮制了$V-E+F=2-2n+q$这个公式，其中n是把多面体表面分成$V-E+F=1$的单连通表面所需的切割数，q是把所有面化为单连通面所要添上的对角线数([1869a]，第72页)。他当时很以他的成就为荣，自称它焕发着"空前的异彩"，甚至是使一个课题"终成定局"，要知道，在他动手之前，"象笛卡儿、欧拉、哥西、日果内、勒让德、格龙奈特、施陶特这类人物都热心钻研过这个课题"呢(第65页)。可是，他的名单里漏了三个名字：吕里埃、约当、李斯丁。别人告诉他有吕里埃那么回事，他发表了一条伤感的注，承认吕里埃五十多年前就知道这一切了。说到约当，他对环形面是不热心的，但偏巧热心钻研过有边界的开多面体，因此，在他的公式里，除了n之外，边界数m也露了头角([1866b]，第86页)。于是，在一篇新文章[1869b]里，贝克尔就把吕里埃和约当的公式拼凑成$V-E+F=2-2n+q+m$(第343页)。但贝克尔在困顿之中过分性急了，没消化李斯丁的长文章。所以，他给[1869b]收尾时伤感地说："李斯丁的概括还要广"。(顺便说说，后来他又设法把他的公式推广到了星状多面体[1874]；参见本书第32页注③。)

② 有人也许持庸人之见，总相信有什么反驳收益递减律。至少伽马决无此念。我们现在不讨论单侧多面体(梅比乌斯[1865])或n维多面体(施赖夫里[1852])。这些例子会证实伽马的预料：全然出乎意料的概念翻开式的反驳永远能给整个理论以某种新的、可能是革命性的推动。

场呢？深到什么程度是个口味问题。

伽马：既有文学批评家，为什么就不能有数学批评家通过公开批评来提高大家的数学口味呢？搞得好，也许就能堵死数学文献里大搞自命不凡的雕虫小技那股潮流。①

西格马：假使你到了（5）就收场，让多面体理论变成有n个环柄的三角化球面理论拉倒，那么，万一有了需要，象（6）和（7）解释掉的那类平淡的反常物，你又怎么对付得了呢？

缪：易如儿戏嘛！

帖塔：行。那么，我们到了（5）就暂且收场吧。不过，我们收得了场吗？概念绷开了，（5）也可能被驳倒！如果概念绷开得到的是一个暴露定理内容贫乏的反例，我们大可置之不理。但是，如果得到的是一个暴露出它分明为假的反例，怎么办？我们不妨拒绝应用增加内容的规则4或规则5去解释非非之想，却不能不应用保存内容的规则2来防止定理被非非之想驳倒。

伽马：就是这个话嘛！我们不妨把廉价的"概括"打发掉，却很难说可以把"廉价"的反驳打发掉。

西格马：何不给"多面体"建造怪物除外定义，每出一个非非之想就添它一个新子句？

帖塔：不论怎么做，都要重温吓人的旧梦：恶的无穷。

阿尔发：当你们还在增加内容的时候，你们是在发展观念，

---

① 坡亚指出，浅薄的廉价的概括"今天比以往更时髦。这种概括是用一个大术语把一个小念头发得泡泡的。就连那么个小念头，作者照例也宁愿从旁人手里拿过来，力戒补充任何独到的观察，力避解决任何问题，除了他自己的术语遇阻惹出来的几个问题之外。举例很容易，但我无意树敌"（[1954]，第1卷，第30页）。当代另一个最伟大的数学家冯·诺伊曼也告诫大家要提防这种"蜕化的危险"，但他认为，"只要这门学科处在有超常上乘口味者们的影响下"，这也没什么大不了（[1947]，第196页）。人们很想知道，在我们这个"要么发表，要么报销"的时代，"有超常上乘口味者们的影响"是不是就足以拯救数学了。

是在搞数学，打那以后，你们就老在澄清概念，老在搞语言学。增加内容的活路一收场就全盘收场，有何不可？干吗偏要去上恶的无穷这个圈套呢？

缪：又是把数学跟语言学对立起来，别来那一套啦！老争这类问题，知识永远不会得益。

伽马："永远不会"立刻就要变成"立刻就要"。我不惜一切重新翻出老问题来讨论。

缪：可是，咱们钻死胡同已经钻到头啦！难道谁还有什么新鲜玩意儿可说不成？

卡帕：我想，我还有吧。

9. 批评怎么能把数学真理变成逻辑真理

(a) 无限制的概念绷开破坏意义和真理

卡帕：阿尔发早已说过，我们的"老一套的方法"要导致恶的无穷。伽马和兰勃达还之以牙，指望滚滚而来的反驳也许有泯灭的时候。现在我们懂得反驳成功的机制是概念绷开，也就知道他们是白指望。拿任何命题来说，其中的术语永远有某种充分窄的解释使它成为真，又有某种充分宽的解释使它成为假。哪一种解释是原定的，哪一种是非原定的，不用说，全看我们原先是怎么定的。前一种解释可以叫教条主义的、验证主义的或核正主义的解释，后一种则是怀疑主义的、批判的或反驳主义的解释。过去阿尔发称前者为约定主义策略，① 现在我们看出后者也是。诸位嘲笑德尔塔对朴素猜想作了教条主义解释，随

① 阿尔发其实没有公开用过这个波普尔派的术语。

后又嘲笑阿尔发对定理作了教条主义解释。可是，概念绷开会把任何陈述都驳倒，无论什么真陈述都留不下来的。

伽马：且慢。我们曾经把"多面体"绷开，这话不假。但随后我们又把它撕破了，扔掉了。所以，正如派所指出的，"多面体"这个朴素概念在定理中就不再露面了。

卡帕：可是，这时候你们又会动手绷开定理中的某个术语，某个理论术语。不会吗？你自己就打定了主意把"单连通面"绷开，好收容柱子上的圆和套圈嘛。你还暗示，敢不敢伸出脖子去博得"可反驳者"的尊位，也就是敞开作反驳主义解释的大门，这是做学问诚实不诚实的问题。但是，因为概念总能绷开，可反驳就意味着有反驳。这样一来，你就滑上一条无穷长的斜坡，把个个定理都驳倒，而代之以更"严格的"定理，即虚假性尚未"暴露"的定理！可是，你始终赶不光虚假性。

西格马：假使我们适可而止，从此采取核正主义解释，寸步不离真理和表达真理的特定语言形式，又会怎么样呢？

卡帕：那时候，你只好用怪物除外式的定义来抵挡概念绷开式的反例。因此，你又会滑上另一条无穷长的斜坡，被迫承认你的真定理的个个"特定语言形式"都不够确切，被迫在其中安插越来越"严格的"定义，叙述定义的是含混性暂未揭露的术语！可是，你始终赶不光含混性。①

帕塔(旁白)：如果某种助探论就是要以含混性为生长的代价，那又有什么错呢？

---

① 编者按：卡帕说含混性不可免，这是对的(有些术语注定了是初始的)。但他认为这意味着永远能靠"概念绷开"来炮制反例，这就错了。按定义，有效的证明就是这么一种东西，不管你对描述术语作何解释，也永远造不出反例。这就是说，尽管你可以随心所欲地绷开描述术语，证明的有效性并不依赖它们的意义。拉卡托斯本人也指出过这一点，见本节(b)，又见第2章第3节(讲得更清楚)。

阿尔发：我给你讲过了，准确的概念和不可动摇的真理不住在语言里，只住在思想里！

伽马：我倒要难难你，卡帕。考虑到柱子之后，我们的定理成了这副模样："对于所有带单连通面的简单对象，如果各面的棱终止于顶点，$V-E+F=2$"。这个定理，你怎么用概念绷开法驳倒呢？

卡帕：我先回想定义项，把这个命题一板一眼地写全，然后决定绷开哪个概念。比方说，"简单"是指"移走一面之后能放在平面上绷开"。我就把"绷开"绷开。瞧瞧早先讨论过的那对共有一棱的孪生四面体(图6(a))。它是简单的，它的面是单连通的，但$V-E+F=3$，可见定理是假的。

伽马：可是，这对孪生四面体并不是简单的呀！

卡帕：不用说，是简单的。不论移走哪一面，我都能把它绷到平面上。只不过到了临界棱的时候，我得小心翼翼，沿着那条棱打开第二个四面体，别把那儿的任何东西撕破。

伽马：可是，这并不是绷开呀！你是把那条棱撕破——或劈裂——成两条棱了嘛！你总不能把一点映射成两点吧，因为绷开是双连续一一映射！

卡帕：定义7吗？你给"绷开"作的这种狭隘的教条主义解释，恐怕并不合我的常识哩。比方说，我完全可以想象一个正方形（图24(a)）绷成两个套装正方形，只要把边界线绷开就行



图24

了(图24(b))。象这样的绷开，你会只因为它不是“双连续一一映射”，就冠以“撕破”或“劈裂”的称号么？顺便说说，我不知道，你何以不把绷开定义成保持V、E、F不变的变换，就此一了百了？

伽马：行，算你又赢了。总之，要么我就不得不附和你给“绷开”作的反驳主义解释，去扩充我的证明或是另找更深刻的证明或是并入某条引理；要么我就不得不引进新的怪物除外定义。不过，无论是哪一种情况，我都要始终不渝地让我的定义项越来越清晰。为什么不会到达这样一步，术语的意义清澈如晶，以致命题只有单一的解释？$2+2=4$正是如此。这些术语的意义丝毫无弹性，这个命题的真实性丝毫不容反驳，千秋万世，显示着理性所固有的洞烛真伪的能力。

卡帕：混淆是非的能力！

伽马：有本事，你就绷开。

卡帕：这简直是儿戏！在某些情况下，二加二得五。假定我们想寄两样物品，各重二磅；我们把它们装在一只重一磅的匣子里寄；那么，按这样的包装法，二磅加二磅就得五磅！

伽马：但是，你是把三个重量相加才得五磅的：2加2再加1！

卡帕：不错，我们的运算“2加2得5”按原定涵义不是加法。但是，给加法的意义来个简简单单的绷开，就能使这个结果生效。朴素的加法是包装的一种很特殊的情况，其中覆盖材料的重量为零。这条引理，我们也得当作一个条件插入猜想。所以，我们改进了的猜想该是：“对于‘不添重量的’加法，$2+2=4$”。① 一整部代数史就是一系列这样的概念绷开和证明绷开呢。

---

① 菲利克斯[1957]，第9页。

伽马：我看你把“绷开”搞过头了点。下一回，你该把“加”解释为“乘”，说这也算反驳啦！要不然，你就该把“所有多面体都是多面体”里的“所有”解释成“没有”啦！你是把“概念绷开”概念绷开了！我们一定要划清绷开得合理的反驳跟绷开得不合理的反驳的界线才行。决不能允许你随兴之所至绷开你相中的任何概念。

我们必须用清澈如晶的术语把反例概念扣得准准的！

德尔塔：连伽马也变成怪物除外者了，他现在想给概念绷开式的反驳下个怪物除外式的定义了。合理不合理毕竟还得靠无弹性的精确概念才分得清哟。①

卡帕：可偏偏就没有这样的概念！为什么不承认我们确定自己所云何意的能力等于零，所以我们的证明能力也等于零呢？如果你想叫数学有意义，只好出让确实性。如果你想要确实性，就别讲究有意义。两头都要可不行。莫知所云的哼哩咕唧保险驳不倒，有意义的命题总可以被概念绷开驳倒。

伽马：照这么说，你最后这句话也能被驳倒，而且你心里是明白的。“怀疑派不是言行一致的人的宗派，而是撒谎者的宗派。”②

卡帕：谩骂，这就是理性最后的防身武器！

(b) 缓和的概念绷开能把数学真理变成逻辑真理

帖塔：我看还是伽马说得对，划清合理的与不合理的概念绷开的界线确有必要。因为，概念绷开已经明明变了质，从温

---

① 伽马要求给“反例”下个清澈如晶的定义，这无异于要求无语言中有清澈如晶的无弹性概念作为合理讨论的一个先决条件。

② 阿诺德和尼科尔[1724]，第xx—xxi页。

和的合理的活动变成过激的不合理的活动了。

原先，批评的目标全集中在给一个特定概念作轻微的绷开。一定是轻微的，所以我们才无所察觉；如果绷开的真相暴露了，就不会有人承认这算合法的批评了。目标是集中在一个特定概念上的。这可以举我们那些不算太繁的全称命题为例。如果命题写成“所有A是B”，批评不外是指找出一个轻微绷开了的A(例如我们的“多面体”)而它不是B(例如我们的“欧拉的”)。

可是，卡帕从两方面把这种批评加剧了。第一是把不只一个命题构件置于概念绷开式批评的攻击之下。第二是把概念绷开从颇有节制的秘密活动转为概念的公开变形，如把“所有”变形成“没有”之类。到这个份儿上，受攻击的术语的任何有意义的翻译，只要能叫定理变假，都算是反驳。今后我想采取一种说法：如果一命题相对于构件a, b, …不可反驳，那么它相对于这些构件是逻辑上真的。①这类命题是一个漫长的批评-玄想过程的结局，要有这么一个过程，一部分术语的意义负荷才全部转移到了其余术语以及定理形式上。

好了，卡帕的全部高论不外是说，没有一个命题相对于它的所有构件是逻辑上真的。但是，相对于某些构件是逻辑上真的命题总还可以有的。既然如此，那就只有添了可绷开的新构件之后，才能够给反驳的洪流重开闸门。倘若硬要一干到底，只好滚进非理性主义了事，但是不必。那么，界线该划在哪里呢？大可划出在批评中首当其冲的那一部分构件，只准对这些构件搞概念绷开。逻辑上真不真不取决于它们的意义。

西格马：可见，我们终究采纳了卡帕的见解：真不真至少

① 这是波尔查诺逻辑真理定义的一个略经改写的翻版([1837], §147)。为什么波尔查诺在十九世纪三十年代提出他的定义，还是个谜。模型概念是十九世纪数理哲学中最伟大的革新之一，他的工作把它提前了，所以格外是个谜。

不取决于某些术语的意义！

帖塔：说得对。不过，如果我们想击败卡帕的怀疑主义，避开他的恶的无穷，那么，一到概念绷开不复为生长工具而沦为破坏工具的节骨眼儿上，我们就非住手不行了。这时候，我们也许得追究追究，哪些术语的意义不能绷开，否则必以破坏基本的合理性原则为代价了。①

卡帕：你这套批判理性论里的概念，许不许我们绷开呢？莫非它是明明真的，表述它的术语都是不可绷开的精确术语，无需乎定义不成？你的批评论的下场会不会是"以一厢情愿为退路"，就是说，一切都可批评，唯独你的批评论、你的"元理论"是例外？②

欧米伽（朝着易卜西隆）：我不欣赏这种从真实性转到合理性的权宜之计。合谁的理性呀！我觉得约定主义在渗入。

倍塔：你在说些什么啊？我理解帖塔讲的概念绷开的"温和模式"。我也理解概念绷开可以对不只一个术语实行攻击。当卡帕把"绷开"绷开或伽马把"所有"绷开的时候，我们就目睹了

① 十九世纪的数学批评把越来越多的概念绷开了，把越来越多的术语的意义负荷转嫁到了命题的逻辑形式上，转嫁到了少数（当时尚）未绷开的术语的意义上。二十世纪三十年代，这个过程似乎慢下来了，可绷开的术语（"逻辑"术语）与不可绷开的术语（"描述"术语）之间的分界线似乎稳定下来了。大家就一份只含有少数逻辑术语的清单达成了广泛的协议，这才有可能给逻辑真理下一个泛泛的定义；至此，逻辑上真不真才不再是"相对于"顾此失彼的构件清单了。（参见塔尔斯基[1935]。）然而，塔尔斯基觉得这种分界费解，疑心他会不会最后还是得回到一个相对化的反例概念，因而回到一个相对化的逻辑真理概念——象波尔查诺的概念一样，顺便提一句，塔尔斯基不知道有那回事（第420页）。这方面最有趣的结果是波普尔的[1947—1948]，由此可以推定，再放弃更多的逻辑常项就不能不放弃合理讨论的某些基本原则。

② "以一厢情愿为退路"是巴特利的用语[1962]。他主要是从宗教知识着眼，研究是否可能给批判理性主义作合理辩护的问题。不过，从数学知识着眼，发问模式大体是相同的。

这种情景……

西格马：伽马绷开的分明是"单连通"嘛！

倍塔：才不是哩！"单连通"是个缩写，他只是把出现在它的定义项中间的"所有"这个术语给绷开了。①

帖塔：言归正传。使你反感的是"公开的"过激的概念绷开吧？

倍塔：是的。没人会承认这种牌号的反驳是真正的反驳！我很明白，派所揭示的靠温和的概念绷开进行助探批评的趋势，是数学生长的一种最最重要的推进力。可是，数学家永远不会接受这种野蛮的反驳形式！

教师：你错了，倍塔。他们已经接受了，而且他们的勇于接受还成了数学史上的一个转折点哩。数学批评方面的这场革命改变了数学真理概念，改变了数学证明标准，改变了数学生长模式！②可是，我们的讨论现在也该暂告一段落了。这个新阶段，我们改次再议。

西格马：可是，那岂不是什么问题也没解决？我们现在不能收场。

教师：我深表同情。这个最新阶段对我们的讨论会有一些重要的反馈。③可是，科学探究总是"始于问题，终于问题"。④（离开教室。）

---

① 伽马事实上是想从"所有"身上移掉一点意义负荷，使它不再只适用于非空类。从"所有"的意义中移掉"存在含义"，借此使空集由怪物转化为普通的资产阶级集合，这种有节制的绷开堪称一件要事，不仅关涉到给亚里士多德逻辑重新作布尔式集合论解释，也关涉到"空洞满足"这个概念在数学讨论中浮现。

② 批评、反例、推断、真理、证明等概念不可分隔；当它们起变化的时候，最先变的总是批评概念，然后别的概念才跟着变。

③ 参见拉卡托斯[1962]。

④ 波普尔[1963b]，第968页。

倍塔：可是，我一开始什么问题也没有！现在，我除了问题，什么也没有！

第二章

编者引言

前文提到了笛卡儿-欧拉猜想的庞卡勒证明。在拉卡托斯的博士论文里，以讨论欧几里得数学方案的正、反论据作引子，详细考察了这个证明。这场讨论，有些部分被拉卡托斯编进了第一章(例如，见该章第5节(d)和按语)，别的也改写成"无穷回溯与数学基础"的若干段落了(拉卡托斯[1962])。所以，这场作引子的讨论，这里一概从略。

欧几里得纲领企图给数学配置用一清二楚的术语叙述的千真万确的公理。它的鼓吹者是易卜西隆。易卜西隆的哲学受到挑战，但教师提醒大家，向他挑战最爽快的办法是要他给笛卡儿-欧拉猜想拿出一个满足欧几里得标准的证明。易卜西隆应战。

1. 把猜想翻译成向量代数的"一目了然"的术语。翻译问题

易卜西隆：我接受挑战。我要来证明，所有带单连通面的单连通多面体都是欧拉的。

教师：对，以往的课上我陈述过这个定理。

易卜西隆：我已经指出过了，必须先找到真理，才好证明

真理。我可一点也不反对用你们的多证多驳法作为发现真理的方法，但你们的终点正是我的起点。你们在哪里停止改进，我就在哪里开始证明。①

阿尔发：这个长定理里到处是可绷开的概念。我可不信，我们会觉得它不容易驳倒。

易卜西隆：你们会觉得它不可能驳倒。我要把每一个术语的意义都扣得死死的。

教师：往下讲吧。

易卜西隆：首先，我只用尽可能清晰的概念。有时候也许我们是有能力把极其精密的知识推广，连什么光学照相机、纸和剪刀、橡皮球和气筒也给包罗进来。但是，现在该忘掉这些玩意儿了。不用说，即使这些五花八门的工具全部用上，最终性也是达不到的。我们以往一败再败，据我看，根子就在用了与多面体的质朴本性背道而驰的方法。华而不实的想象，唤出这种种工具各显神通，其实全然走偏了方向。它所引证的尽是外在、偏远、偶然的成分，都跟多面体的本质配不上，败在某些多面体手里也就无足为怪。想得到完善的证明，就一定要对所用工具的范围加以限制。② 这是因为，这种华而不实的想象使确实性太难到手了。既然要倚赖橡皮、透镜等等的性质，引理的真实性是难于有保证的。剪刀、气筒、照相机和诸如此类的工具，理应放弃，因为，“要理解一个问题，必须从一切多余的因

---

① 了解证明程序有助探价值的欧几里得派学者，易卜西隆大概要算破天荒第一个了。一直到十七世纪，欧几里得派才承认柏拉图的分析法是助探方法；但稍后又用碰运气和(或)凭天赋取代了它。

② 作证明分析时，对“工具”没什么限制。我们能够用任何引理、任何概念。在任何生长着的非形式理论里，解题是“能捞就捞”的事情，所以这么说总是对的。在形式化理论中，工具在理论的语法里全数先行规定。在理想情况(有判定程序)，解题只是例行的仪式。

素中把它提取出来，让它尽可能简单”。① 我来给我的定理② 和我的证明作一番清洗，去掉所有这些东西，只许它们谈最简单最易懂的东西，③ 就是顶点、棱和面。由于这些术语的意义决不会引起分歧，我不下定义。任何有一丝一毫模糊性的术语，我自会用一目了然的“初始”术语来定义。④

很清楚，已有的一切证明里，专用引理无一是显然真的；它们都只是象“所有多面体都能吹胀成一只球”之类的猜想而已。现在呢，“按我的要求，不论哪一种猜想都不准进入我们传达事物真谛的判断之中”。⑤ 我也要把猜想分解成一些引理，但这些引理不复是猜想，而是“直觉”，也就是“一颗纯洁专一的心仅凭理性产生的无犹豫的见地。”⑥ 这类“直觉”的例子是：所有多面体都有面；所有面都有棱；所有棱都有顶点。至于多面体是立体还是曲面这样的问题，我提都不提。这些是含混概念，对达到我们的目的也根本是多余的。在我看，一个多面体不外是三个集合组成的：V 个顶点（称为 P_1^0，P_2^0，…，P_V^0）的集合，E 个棱（称为 P_1^1，P_2^1，…，P_E^1）的集合，F 个面（称为 P_1^2，P_2^2，…，P_F^2）的集合。为了刻划一个多面体的特征，还需要某种表告诉我们哪些顶点属于哪些棱、哪些棱属于哪些面。这些表，我要称之为“关联矩阵”。

伽马：我让你的多面体定义搞得有点莫名其妙。首先，你

---

① 这是笛卡儿[1628]规则XIII里的话。

② 不可忘记，定理是证明分析的结尾，却是欧几里得式证明的开端。在欧几里得方法论里没有猜想，只有定理。

③ 笛卡儿[1628]，规则IX。

④ 帕斯卡的定义规则（[1659]，第596—597页）：“凡是一目了然的现成术语，不要下定义。凡是有一丝一毫模糊性或多义性的术语，不准不下定义。在术语的定义里，只使用一目了然或作过解释的词。”

⑤ 笛卡儿[1628]，规则III的按语。

⑥ 同上。

到底费了点心思去给多面体概念下定义，所以，我论定，你并不认为它是完全一目了然的。可是，既然如此，你又从何而知你的定义该这么下呢？你用“一目了然”的面、棱、顶点概念给模糊的多面体概念下了定义。可是，你的定义——即多面体是顶点集加棱集加面集加关联矩阵——显然没能抓住直觉的多面体概念。例如，你的定义蕴涵着任何一个多边形都是多面体，因为，比方说，一个多边形跟一条在它身外逍遥的棱凑在一起也算多面体嘛。现在你只好在两条路当中选。你尽可说，“数学家才不过问他的专门术语的流行意义哩……数学上的定义创造数学上的意义”。①在这种情况下，给多面体下定义就是把老概念根本删去，用新概念取而代之。可这么一来，你的“多面体”即使跟真正的多面体有一点点相似，也纯属巧合。研究你的乔装多面体，得不到什么有关真正多面体的可靠知识。另外一条路是抱定主意，说定义是澄清，是使本质特性由隐而显，是一种翻译，或者说，是一种把术语纳入更清晰的语言的保义变换。在这种情况下，你的定义就成了猜想，可以真，可以假。既是从含混术语到准确术语的翻译，你又怎么能说它肯定是真的？

易卜西隆：我承认，你的批评叫我吃了一惊。我原想你也许会怀疑我的公理是绝对真理，我原想你也许会追问这样的先验综合判断怎么可能，我也准备好了若干反论据，我却没料到你会从定义这条路线发起攻击。不过，我琢磨着，我会这么回答：我怎么得到我的公理，我就怎么得到我的定义，还是凭直觉。这两样东西实在是换汤不换药：你可以把我的定义看成补充公理，②你也可以把我的公理看成隐定义③，反正它们都给出

① 坡亚[1945]，第81—82页。

② “定义是一个有关本质的不可证明的陈述”（亚里士多德：《后分析篇》，94a）。

③ 日果内[1818]。

有关术语的本质。

教师：哲学谈够了！还是让我们看看证明吧。我不喜欢你的哲学，但仍然可能喜欢你的证明。

易卜西隆：行。我要先把求证的定理翻译到我的简单之极、清晰之极的概念框架中去。我的专用不定义术语是：顶点、棱、面、多面体。有时候，我要把它们叫做零、一、二、三维的多胞形①，或简称0胞形、1胞形、2胞形、3胞形。

阿尔发：可是，仅仅十分钟之前，你还用顶点、棱和面给多面体下过定义哩！

易卜西隆：当时我搞错了。那个"定义"是不知不觉的过早之言。我傻呼呼向前赶，一跃而落入了妄断。真的直觉、真的解释总是慢慢成熟的，洗净灵魂中的猜想总要花时间。②

倍塔：刚才你提到过你的某种公理，如：面都有棱，换言之，每个面都有属于它的棱。"属于"算不算另一个初始术语呢？

易卜西隆：不算。我只登记有关理论的专用术语，在当前就是多面体理论的专用术语，不登记底层理论的逻辑、集合论、算术术语，而假定大家熟悉之极。还是让我往下讲讲"单连通"这个术语吧，不言而喻，它不是绝对清晰的。我先定义多面体的单连通性，再定义面的单连通性。先看多面体的单连通性。这

---

① 这些术语能用单个一般抽象术语作统称，是施赖夫里发现的（[1852]）。他称它们为"多概型"。李斯丁[1861]则称之为"库里安"*。但把这一概括向三维以上作推广的是施赖夫里。

* 原文curian，是李斯丁根据拉丁文生造的，意同"多胞形"。感谢本书英文版编者沃勒尔教授帮助解疑。——译者

② "为区别起见，象平时那样将人类理性应用于自然界问题而得的结论，我称作对自然界的过早之言（这种东西是急就的或早熟的）。理性有根据、有条理地从事实抽出的结论，我才称作对自然界的解释"（培根[1620]，XXVI）。

其实是一大段话的缩写：一个多面体叫做单连通的，如果(1)所有封闭的不带回路的棱系统都有一内部与外部，(2)只有一个封闭的不带回路的面系统把多面体的内部与外部隔开。这句话里到处是相当含混的术语，如"封闭的"、"内部"、"外部"等等。但是，所有这些术语，我都要用一目了然的术语来定义。

伽马：你已经把吹胀、切割之类的力学术语驱逐掉了，以为不足信；现在，连封闭性这样的几何术语，你也要当废物扔进海里。我看你的清洗热未免过火了。"封闭的棱系统"这个概念清晰之极，无需乎定义。

易卜西隆：不，你错了。你肯把星状多边形叫做封闭的棱系统吗？也许你肯，因为它没有一个端点不是被捆住的。可是，它并没有"围出"任何有良定义的面积，而有些人所谓的"封闭的棱系统"也许正是指这样的棱系统。所以，你总得拿个主意，不是这样，就是那样，你总得说说自己是怎样决定的。

伽马：星状多边形也许不是有界的，但显然是封闭的。

易卜西隆：据我看，它既是封闭的又是有界的。分歧是明摆着的，不过我还要拿点更进一层的证据。我很想知道，你肯不肯说七面体是封闭的面系统，而且是有界的？

伽马：我从来没听说过七面体。

易卜西隆：这是一种相当有趣的多面体，因为它是单侧的。它围不出任何几何立体，不能把空间隔成两个部分，一是内部，一是外部。拿阿尔发作个例子，他不是以"清晰的"几何直觉为向导么，前不久他说过，一个封闭的面系统"如果是多面体内部与外部之间的界"，便是在定界。我不知道，他想说七面体的表面不在定界呢，还是想见识一下七面体之后改变他的"定界"系统的概念？既然如此，我极其冒昧地恭请足下赐复：一目了然的概念能够被经验所改变吗？不能够吧。所以，"封闭的"、"有

界的"并非完全一目了然。所以，我才要给它们下定义。

帖塔：画画七面体。我倒想领教领教它的尊容。

易卜西隆：行。我先画一个大伙熟悉的普通八面体（见图25)。现在，在它的对角线绷出的平面上，我再添三个正方形，例如$ABCD$就是其中之一(图26)。

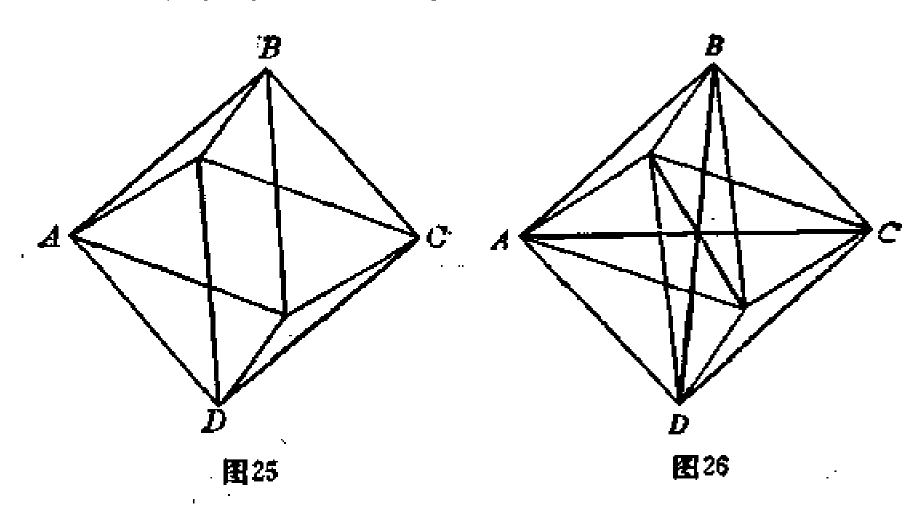


图25　　图26

德尔塔：正正派派的多面体，我会指望它的棱上只有两个面相交的。这儿偏偏有三个。

易卜西隆：别急嘛。为了迎合你这项要求，我这就要移走四个三角形。从图形的前一半，我把左上侧的三角形和右下侧的三角形移走。从图形的背后，我把左下侧的三角形和右上侧的三角形移走。这时，只剩下图内有阴影的四个三角形了（图27①）。于是，我们得到一个图形，由四个三角形和三个正方形组成。这就是七面体。②它的棱和顶点是八面体原来的棱和顶点。八面体的对角线不是我们这个图形的棱，而是它的自交线。我可不很看重几何直觉。我的多面体偏巧不能那么服贴地嵌入三维空间，这是事实，但我不很感兴趣。这个事实，我的七面

① 图27是根据希尔伯特和康福森[1932]重画的。

② 由赖因哈特发现(见[1885]，第114页)。

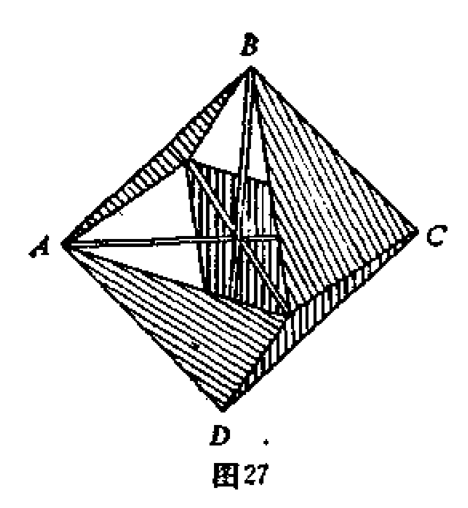


图27

体的关联矩阵不予体现。(顺便说说，七面体可以恰到好处地嵌入五维空间而不自交。)①

现在问：七面体的表面在定界吗？如果你的定义是：一个表面在“定界”当且仅当它在分隔有关多面体的内部与外部那种涵义上是该多面体的界，那么回答便是“不”。反之，如果你的定义是：一个表面在“定界”当且仅当它在包括多面体的一切面那种涵义上是它的界，那么回答便是“是”。你瞧瞧，你非给“定界”下定义不可，你非给“界”下定义不可。这些概念，在没动手调查千姿百态的多面体之前，仿佛是有人人熟悉的味道。可是，经过一段调查，原来的粗糙概念破裂了，呈现出了某种精微结构。如此看来，你一定要小心翼翼地定义你的概念，以便弄清自己究竟是按哪种涵义在用。

卡帕：如此说来，你一定要对进一步调查的动议行使否决权，以免进一步破裂！

教师：易卜西隆，别听卡帕的。总的说来，反驳、抗辩、批评是很重要，但也只在导致改进的时候才重要。单纯的反驳算

① 狄克最先察觉单侧性还是双侧性与空间维数无关。见他的[1888]，第474页。

不上胜利。单纯的批评，即令正确，也没有无上权威，否则贝克莱就会使数学停止发展，狄拉克也不会找到肯收辑他的文章的编者了。

易卜西隆：别耽心。卡帕的刁难没打到点子上，我当下就抛在脑后了。我现在继续来给我的术语下定义，把样样东西都翻译成我那几个专用初始术语，即各种多胞体和关联矩阵。我从定义“界”入手。一个k胞形的界就是按关联矩阵属于它的$(k-1)$胞形之和。我要把k胞形之和叫做k链。比方说，多面体的“表面”(或它的任一部分)本质上是2链。一条k链的界，按我的定义，是属于那条k链的$(k-1)$胞形之和，不过，我不取普通的和，而取模2的和。这意味着以下等式成立：

$$0+0=0,\ 1+0=1,\ 0+1=1,\ 1+1=0。$$

你们必须懂得，这才是k链的界的真定义。

倍塔：稍停片刻。你这些“k维的定义”，我可不容易跟上。让我就着例子，大声想想是怎么回事。① 比方说，一个面的界，按你的定义，是属于它的棱的集合。现在，如果我把两个面并成一个，公共的界就不含它们共有的棱了。所以，把各棱相加的时候，我会把成对出现的棱删去。比方说，取两个三角形(图

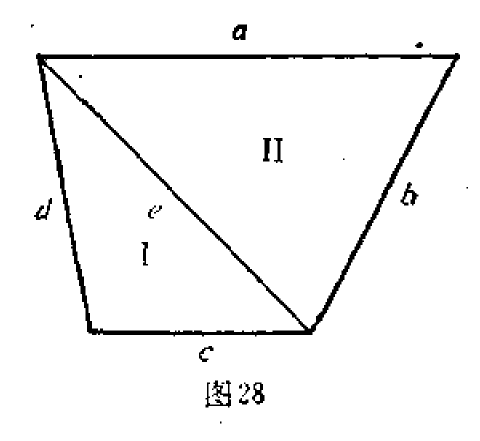


图28

① 编者按：“大声想想”是拉卡托斯式英语的专门术语。

28)。第一个的界是$c+d+e$，第二个的界是$a+b+e$，它们并成的图形的界是$a+b+e+c+d+e=a+b+c+d$。现在我明白你为什么要在定义里引进模2的和了。请接着讲吧。

易卜西隆：我已经用一目了然的术语定义了"界"，现在来定义"封闭性"。以往你们不是只好凭浑沌的顿悟行事，就是只好分门别类定义封闭性，先定义棱系统的封闭性，再定义面系统的封闭性。现在，我让你们看看，有一个适用于任何k链的一般封闭性概念，不管k是什么。我要把一条k链叫做封闭k链，简称k环道，当且仅当它的界是零。

倍塔：稍停片刻。让我瞧瞧：普通的多边形凭直觉看是封闭的，果然，按你的定义也封闭，因为它的界是零，这是由于，每个顶点在界中出现两次，在你的模2代数里该得出零。普通的简单多面体是封闭的，它的界又是零，这是由于每个棱在界中出现两次。

卡帕(旁白)：易卜西隆一"顿悟"就"豁然开朗"的事情，倍塔倒得下大力气才核实得了！

易卜西隆：下一个需要澄清的术语是"定界"。如果一条k环道是某条$(k+1)$链的界，我就说它在定界。比方说，球性多面体的"赤道"是在定界，环性多面体的"赤道"则不是。在后边这个情况，现在要是还存二心，说它在给"整个"多面体定界，就不许可了，因为无所谓整个多面体的界。现在，比方说七面体在定界，就绝对清楚了。

倍塔：你说快了点儿，不过似乎是对的。

伽马：你能证明任何在定界的k链都是一条环道吗？你只给环道下了"定界"的定义，而你本来可以一般地给链下那个定义的。你只下有限定义的理由，想必就是有这个潜在的定理吧。

易卜西隆：说得对。我能证明那个定理。

伽马：还有一点要质疑。有些链是环道、有些环道在定界，在我看来，都说得过去。不过，我想，正正派派的k链的界总该是封闭的。比方说吧，我决不会承认缺了顶的立方体算多面体，我也决不会承认缺了一条棱的正方形算多边形。你能证明任何k链的界都是封闭的吗？

易卜西隆：我能证明任何k链的界的界都是零吗？

伽马：说的就是这个话嘛！

易卜西隆：不，我不能。这是千真万确的。这是一条公理。这无需乎证明。

教师：往下讲，往下讲呀！我敢说，你这会儿能把我们的定理翻译成你那些一目了然的术语了。

易卜西隆：是的。简言之，译出的定理是："所有多面体，如果它的所有环道都在定界，就是欧拉的"。专用术语"多面体"不定义；"环道"和"限界"，我已经用一目了然的术语定义过了。

伽马：至于面的单连通性，你已经忘记还有那回事了。你只翻译了多面体的单连通性哩。

易卜西隆：你错了。我要求所有环道都应当在定界，足见连0环道也不例外。我已经把"多面体的单连通性"翻译成"所有1环道和2环道在定界"，把"面的单连通性"翻译成"所有0环道在定界"了。

伽马：我听不懂你的话。什么叫0环道？

易卜西隆：0链是任何的顶点之和。0环道是任何的其界为零的顶点之和。

伽马：可是，什么叫顶点的界呢？总没有－1维的多胞形吧！

易卜西隆：当然有的。不如这么说吧，有独一个，就是空集。

伽马：你疯啦！

阿尔发：他也许没疯。他是在引进一项约定。我倒不在乎他采取什么概念工具。还是看看他的结果再说。

易卜西隆：我才不使用约定，我的概念可不是什么“工具”。空集就是 -1 维的多胞体。照我看，它的存在肯定要比你的狗的存在更显而易见。

教师：别搞柏拉图式的宣传！讲讲清楚你的“定界的 0 环道”是怎么把“单连通面”给翻译出来的。

易卜西隆：你们一旦明白了任何顶点的界都是空集，其余就都不在话下。按我早先的定义，一个顶点的界是空集，但根据模 2 代数，两个顶点的界是零。三个顶点的界又是空集，依此类推。所以，成偶数的顶点就是环道，成奇数的顶点就不是。

伽马：所以，你要求 0 环道应当在定界，本意不外是要求任何两个顶点必须是在给某条 1 链定界，或者用普通语言来说，不外是要求任何两个顶点必须由某一棱系统联结。不用说，这就把环形面排除掉了。这倒的确正合要求，只是按照我辈俗例，这条要求叫做“各面自身的单连通性”。

易卜西隆：你怎么也否认不了，作为反映多面体本质的自然语言，我的语言第一次说明，先前互不联结、各自孤立、顾此失彼的各种准则有着根深蒂固的本质上的同一性！

伽马(旁白)：我怎么也否认不了的是我百思不得其解！在通往这种“自然的简单性”的道路上非得乱七八糟地布满如此复杂的玩意儿，这才真叫稀奇。

阿尔发：让我检查一下我理解得如何。你是说，所有的顶

点都有同一个界，就是空集？

易卜西隆：对。

阿尔发：那么，我料定，“所有的顶点都有空集”照你看也是一条公理，跟“所有的面都有棱”或“所有的棱都有顶点”一模一样。

易卜西隆：对。

阿尔发：但是，这几条公理决不能等量齐观呀！头一条是约定，后两条必然真！

教师：定理已经翻译好了。我盼望能看看证明。

易卜西隆：立刻就证，老师。请允许我稍微改一下定理的表述，改成：“所有多面体，如果其中环道与定界环道重合，就是欧拉的”。

教师：证明吧。

易卜西隆：立刻就证，老师。我还要把它改个说法。①

倍塔：你倒是安的什么心啊？你的术语，凡是有一点儿模糊的，你都已经翻译成一目了然的术语了嘛！

易卜西隆：这话不假。不过，我就要作的翻译是很别致的。我要把我的全套初始术语翻译成另一套还要基本的初始术语。

倍塔：如此说来，你的一目了然的术语还有甚了然与不甚了然之分喽！

教师：倍塔，别一个劲儿刁难易卜西隆！全神贯注，看他在干什么，别管他怎么解释他在干什么。往下讲，易卜西隆。

易卜西隆：如果更仔细瞧瞧我方才给定理作的表述，就会看出，这个定理讲的是关联矩阵所决定的某些向量空间的维

① “你能把问题改个说法吗？你能用个不同的方式来说吗？”（波亚[1945]，封里。）

数。

倍塔：什么？

易卜西隆：瞧瞧我们的链概念吧。比方说，一条1链就是这么个东西：

$$x_1\theta_1+x_2\theta_2+\cdots+x_E\theta_E,$$

此处$\theta_1,\cdots,\theta_E$是E个棱，$x_1, x_2,\cdots,x_E$或是0或是1。

容易看出，1链形成模2剩余类域上的E维向量空间。泛言之，k链形成模2剩余类域上的N_k维向量空间(N_k代表k胞形数)。环道形成链空间的子空间，而定界环道又形成环道空间的子空间。

可见，我的定理其实是"如果环道空间与定界环道空间重合，那么，0链空间的维数减去1链空间的维数加上2链空间的维数等于2"。这才是欧拉定理的本质。

教师：我喜欢你这个表述。这么一改，果然把你那些简单工具的本性显出来了。你的确没有食言。毫无疑问，你现在要用向量代数的简单方法来证明欧拉定理了。让我们看看你的证明吧。

2. 猜想的另一种证明

易卜西隆：我把我的定理分解成两部分。第一部分是说：环道空间与定界环道空间重合，当且仅当，它们的维数相同。第二部分是说：如果环道空间与定界环道空间同维，那么，0链空间的维数减去1链空间的维数加上2链空间的维数等于2。

教师：第一部分是向量代数的平淡的真引理。证明第二部分吧。

易卜西隆：再容易不过了。我只需要回想一下其中概念的

定义就行了。①先写出我们的关联矩阵。比方说，看看四面体 $ABCD$ 的关联矩阵，假定它的棱是 AD、BD、CD、BC、AC、AB，面是 BCD、ACD、ABD、ABC。矩阵内的值是 $\eta^k_{ij}=1$ 或 0，依 P^i_{k-1} 属于或不属于 P^j_k 而定。所以，我们有如下几个矩阵：

η^0	A	B	C	D
空集	1	1	1	1

η^1	AD	BD	CD	BC	AC	AB
A	1	0	0	0	1	1
B	0	1	0	1	0	1
C	0	0	1	1	1	0
D	1	1	1	0	0	0

η^2	BCD	ACD	ABD	ABC
AD	0	1	1	0
BD	1	0	1	0
CD	1	1	0	0
BC	1	0	0	1
AC	0	1	0	1
AB	0	0	1	1

η^3	$ABCD$
BCD	1
ACD	1
ABD	1
ABC	1

现在，借助于这些矩阵，就可以轻而易举地刻划环道空间和定界环道空间了。我们已经懂得，k 链实际上都是向量

① “在心里用定义去置换你要定义的东西”（帕斯卡[1659]）。“回顾定义”（波亚[1945]，封里和第84页）。

$$\sum_{i=1}^{N_k} x_i \rho_i^k。$$

现在我们把 ρ_j^k 胞形的界定义为

$$\sum_{i=1}^{N_{k-1}} \eta_{ij}^k \rho_i^{k-1}。$$

(这只是用符号改写老定义，下面所有的公式都是如此。) k 链 $\sum x_j \rho_j^k$ 的界则是

$$\sum_i \sum_j x_j \eta_{ij}^k \rho_i^{k-1}。$$

于是，k链 $\sum x_j \rho_j^k$ 是 k 环道，当且仅当

(1) 对每个 i, $\sum \eta_{ij}^k x_j = 0$。

k 链 $\sum x_j \rho_j^k$ 是定界 k 环道，当且仅当它是某$(k+1)$链$\sum \gamma_m \rho_m^{k+1}$的界，就是说，当且仅当存在若干系数 $\gamma_m (m=1,\cdots, N_{k+1})$使得

(2) $x_j = \sum \gamma_m \eta_{jm}^{k+1}$。

可是，显而易见，环道空间与定界环道空间相同，当且仅当它们的维数相同，就是说，当且仅当 N_{k-1} 个齐次线性方程(1)的独立解数的秩等于非齐次线性方程(2)的方程组的独立解数。而根据众所周知的线性代数定理，前一个数是$N_k - \rho_k$，此处 ρ_k 是 $||\eta_{ij}^k||$的秩；后一个数则是 ρ_{k+1}。

总之，我需要证明的只是：如果$N_k - \rho_k = \rho_{k+1}$，那么$V - E + F = 2$。

兰勃达：或者说，"如果$N_k = \rho_k + \rho_{k+1}$，那么 $N_0 - N_1 + N_2 = 2$"。N_k是某些向量空间的维，ρ_k是某些矩阵的秩。这个定理讲的不再是多面体了，而是某多维向量空间集了。

易卜西隆：我看出来了，你才睡醒。你打盹的那会儿，我分析了有关多面体的种种概念，说明了它们实际上是向量代数概念。我把一整批涉及欧拉现象的观念翻译到向量代数中去了，

从而展现了它们的本质。这会儿我证明的当然是向量代数中的一条定理，向量代数才真是清晰而分明的理论哩，术语都是一目了然的，公理都是纯净和毋庸置疑的，证明也都是纯净的、毋庸置疑的。比方说，咱们争执不休的老定理在其中便有了平淡无奇的新证明，你瞧：如果$N_k=\rho_k+\rho_{k+1}$，那么$N_0-N_1+N_2=\rho_0+\rho_1-\rho_1-\rho_2+\rho_2+\rho_3=\rho_0+\rho_3=1+1=2$。现在谁还敢怀疑这个定理的确实性？就这样，我确凿无疑地证明了欧拉的引起争议的定理。①

阿尔发：可是，易卜西隆，你瞧这儿：如果我们采纳一项针锋相对的约定，说好顶点算是无界的，那么，以四面体为例，矩阵η^0就成了

η^0	A	B	C	D
	0	0	0	0

秩ρ_0也就成了0，结果$V-E+F=\rho_0+\rho_3=1$。你不觉得你的“证明”过分倚赖约定吗？你不是为了拯救定理才选中你的约定吗？

易卜西隆：我给ρ_0立的公理可不是什么“约定”。$\rho_0=1$在我的语言里有实实在在的意义，就是每一对顶点都在定界，也就是说棱的网络是连通的(环形面因此被排除在外)。“约定”这个用语是十足的张冠李戴。对于带连通面的多面体，$\rho_0=1$才是真的，$\rho_0=0$必是假的。

阿尔发：哼。你倒象是说$\rho_0=1$和$\rho_0=0$都刻划向量空间里的某种结构，差别只是$\rho_0=1$在带单连通面的多面体里有一个实在的模型，另一个约定却没有这样的模型。

---

① 这个证明出自庞卡勒(见[1899])。

3. 关于证明最终性的几点疑问。翻译工序，本质主义与唯名主义定义方案的对立

教师：不管怎么样吧，我们总算盼来了那个新证明。不过，它是最终的吗？

阿尔发：不是。看看这个多面体(图29)。它有两个环形面，

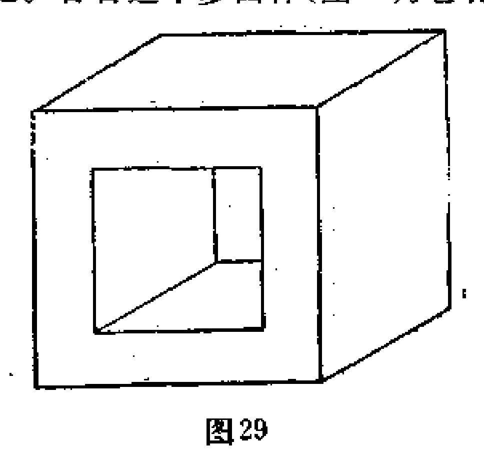


图29

分别位于腹部和背部。它能吹胀成一只圆环。它有16个顶点，24个棱和10个面。因此，$V-E+F=16-24+10=2$。它是欧拉的，但远不是单连通的。

倍塔：我不认为这是笛卡儿-欧拉现象的实例。这倒是吕里埃现象的实例；也就是说，它印证着：对于有k条坑道和m个环形面的多面体，$V-E+F=2-2k+m$。① 凡是象它这样的环形面数为坑道数的两倍的多面体，都会有$V-E+F=2$，可是这并不意味着它是欧拉的。用这类吕里埃现象立刻就能解释为什么我们一直无法轻易得出笛卡儿-欧拉猜想的充分必要条件，或曰"大定理"。原因就在于有这些吕里埃实例挤在欧拉实例中间。

---

① 见吕里埃[1812—1813a]。1812至1890年间，这个关系式被重新发现的次数约摸一打。

教师：可是，易卜西隆从来没许愿说他能达到最终性，只说他能达到比以往更大的深刻性。如今他拿出一个证明，一举解释了普通多面体的欧拉性与星状多面体的欧拉性，也就履行了自己的诺言。

兰勃达：这是实话。各面单连通这项要求，原是指三角剖分过程中每画一条新对角线都得产生一个新面，经他这么一翻译之后，三角剖分观念却消失得精光了。按他这个新译本，只要面中所有的顶点-环道都在定界，面便是单连通的，而**这项**要求对欧拉的星状多面体也成立啦！还有，把约当关于多面体的单连通性的直觉概念（即非**星状**直觉概念）应用到星状多面体上，碰到种种困难。在庞卡勒的译本里，这些困难也消失了。星状多面体跟普通多面体没什么两样，也是顶点集、棱集、面集加上关联矩阵；至于多面体能否在一个空间实现，这个空间凑巧是我们所在的物质的、三维的、大体是欧几里得的空间，则不是我们关心的问题。举小星芒状十二面体为例，它不是欧拉的，而在它上面搜查出不定界的1环道也并不太难。

倍塔：我觉得，从另一面看，这个问题也挺有意思。易卜西隆的证明一举两得，既更严格了，又更广博了。这两者之间有必然联系吗？

易卜西隆：不知道。不过，我们的老师只申请给我的证明**更大的深刻性**，而我自己申请的却是给它**绝对的确实性**。

卡帕：你的定理跟以往任何猜想是一样的命，难免被某种想象得到的概念绷开所驳倒。

易卜西隆：你错了，卡帕，我这就要解释给你听的。

阿尔发：趁你还没解释，让我先提第二个问题，这也关系到你的证明，或者不如说，既关系到它的最终性，又关系到你申请给它的确实性。多面体果真是你的向量代数结构的一个

模型吗？你把“多面体”翻译到向量理论中，但你有把握说这是忠实的翻译吗？

易卜西隆：我早就说过了，它是真的。一样东西使你震惊，这还算不上它可疑的理由。“我要效法一流数学家，他们正是靠着一系列令人震惊的定义，把数学从怀疑派威胁下拯救出来，给数学命题提供了坚实的证明。”①

教师：说真的，我以为这种翻译方法正是易卜西隆证明的确实性与最终性问题的核心。据我想，这理应命名为翻译工序。不过，我们来看看，还有什么别的疑问吗？

伽马：只有一个了。我姑且承认你的演绎万无一失。你有把握说，从你的前提不会同样万无一失地演绎出你的定理的否定么？

易卜西隆：我的所有前提都是真的。它们怎么可能不一致啊？

教师：你们提的疑问，我都挺赏识。但是，依我看，疑问再多，也永远抵不上一个反例。

伽马：我倒很想知道，我的柱子是不是就驳不倒这个新定理？

易卜西隆：当然驳不倒。在柱子里，空集不在定界，因此$\rho_0 \neq 1$。

伽马：我明白了。你说得对。这个论据不出你那些熟悉、清晰、分明之极的术语，一摆出来，我立时心悦诚服。

易卜西隆：你在损人，我懂！先前，你对我的定义提过一

---

① 引自阮姆赛[1931]，第56页。只改了一个词：他说的是“数理逻辑学家”，不是“数学家”。不过，这只是因为他不了解自己描述的那种做法不是数理逻辑的新颖特征，而是自哥西以来“严格”数学的特色：由哥西提出又经魏尔斯特拉斯改进的极限、连续性等概念的著名定义都是符合这条路线的。附记一笔，罗素也从阮姆赛书里引过这句话(罗素[1959]，第125页)。

次质疑。当时我说，它们事实上是千真万确的公理，在陈述有关概念的本质，得助于清晰和分明得万无一失的直觉。打那以后，我老在想这个问题。现在想穿了，我那种亚里士多德式的定义观终究不得不放弃。当我给含混术语下定义的时候，我其实是在用一个新术语替换它，老术语只不过充当了我的新术语的缩写而已。

阿尔发：我来把这件事搞搞清楚。你所谓"定义"究竟指什么？是指用右边的替换左边的呢，还是指用左边的缩写右边的？

易卜西隆：我指的是用左边的缩写右边的。我把老的意义全忘掉。含混的老术语被我抹掉了，我的术语的意义任我自由创造。模糊的老问题也被我抹掉了，我要解决的问题也任我自由创造。

阿尔发：你简直是个无可救药的极端主义者。接着讲你的吧。

易卜西隆：把我的纲领这么一改，我确有一得，就是你们的疑问有一个从此要打消。如果定义是缩写，它们就不会是假的了。

阿尔发：不过你也有一失，比你所得的要紧得多。你现在不得不把欧几里得纲领局限于只有一目了然的概念的那些理论了。如果你想把有含混概念的理论拖进这个纲领的管辖区，靠你那套翻译技巧也休想办到，因为，你说过，你并非在翻译，而是在从事新意义的创造。但是，即使你想方设法去翻译老意义，原来的含混概念的某些本质方面也可能在翻译中丧失掉。本来是要用老概念解决的问题，新的清晰概念倒可能派不上用场。① 不论你把自己的翻译奉为万无一失的，还是把老意义自觉自愿地抹掉，这两个极端的后果一样，反正你会把原问题给推进思想史的垃圾坑，而事实上这决不是你想干的。② 所以，如果你

冷静下来，你一定会承认定义必须有点变相本质主义的味道，就是说，它必须保存老意义的某些要害方面，必须把意义中的要害成分从左边转移到右边。③

倍塔：可是，即使易卜西隆接受定义问题上的这种变相本质主义，出让这一点点本质主义方案，也照样是从他原先的欧几里得纲领撤退了一大截。如今他只说，总有一些术语一目了然、推论万无一失的欧几里得理论吧，象算术、几何、逻辑、集合论之类，我估计他会这么看的。如今他要降低欧几里得纲领，只求把术语含混、推论靠不大住的非欧几里得理论（如微积分和概率论）翻译成这些既成的欧几里得理论，为发展底层理论与原系非欧几里得的理论开辟新的前景。

易卜西隆：我要把这类"既成的欧几里得理论"或立足已稳的理论叫做主宰理论。

伽马：我很想知道，退缩到如此田地的纲领还有什么可应

---

① 不满足这条（照例是不公开的）恰当性准则的翻译有个经典例子，就是被H·A·施瓦茨"反例"打倒了的十九世纪曲面面积的定义。

麻烦的是，随着新问题的涌现——这也许会使概念工具的内阁名单起变化——恰当性准则也可以起变化。这类变化的一个范例就是积分概念史。现在的学生能一丝不差地引用哥西、黎曼、勒贝格等等积分的不同定义，却不知道它们是为了解决哪些问题才发明的，或者是在解决哪些问题的过程中才发现的。这是当今数学教育的耻辱。恰当性准则在变，各种定义也随之发展，其结局照例是跟所有准则都合辙的那个定义变成主宰的定义。积分定义却不会出现这种局面，因为各种准则并不一致。这便是积分概念不得不破裂的道理。哪怕是按欧几里得纲领来建立翻译定义的时候，证明生成的定义也是起决定性作用的。

② 这个历程很能体现二十世纪形式主义的特征。

③ 真够怪的，象帕斯卡和波普尔这样的唯名主义者居然无视这个平凡的道理。帕斯卡写道（出处同上）："……几何学家和一切讲究章法的人，只是为了少说废话才给事物加上名称的。"波普尔写道（[1945]，第2卷，第14页）："在现代科学里只有唯名主义定义出现，换言之，要长话短说才引进了省略符号或标签。"有趣极了，唯名主义者和本质主义者怎么会都闭眼不看对方论据中的合理内核呢？

用的地盘？它肯定容纳不了物理。波动力学永远无法翻译成几何吧。易卜西隆想"靠着一系列令人震惊的定义，把数学从怀疑派威胁下拯救出来"，但他拯救出来的至多是一点点面包渣儿。

倍塔：关于那些翻译定义，我有个问题。在主宰理论里，那些定义看来好象是单纯的缩写，因此在那里"按定义"为真。可是，只要我们一设想它们谈的是非欧几里得领域，它们看来就可否证了。①

易卜西隆：言之有理。

倍塔：看看人们怎么否证这类定义，倒是挺有趣哩。

帖塔：我愿意调转头来讨论易卜西隆的演绎是否万无一失的问题。易卜西隆，你还要申请给你的定理确实性么？

易卜西隆：确实是的。

帖塔：这么说，你不能想象它有反例喽？

易卜西隆：我对卡帕讲过了，我的证明万无一失。它没有反例。

帖塔：你的意思是要把反例当怪物排除在外么？

---

① 这种区别在方法论上有多重要，还没有真正琢磨透。帕斯卡，鼓吹缩写定义而反对亚里士多德本质主义定义理论的大家，并没有察觉放弃本质主义事实上等于放弃大号的欧几里得纲领。按欧几里得纲领，哪怕是"只有少许模糊"的术语也统统必须下定义。假使这不过是把含混术语用任选的准确术语来替换的话，那事实上就放弃了原来的研究领域，转到了另一领域。但帕斯卡肯定不想搞成这副样子。哥西和魏尔斯特拉斯，在实行数学的算术化的时候，是本质主义者；罗素，在实行数学的逻辑化的时候，也是本质主义者。这些人都认为自己给连续性、实数、整数等等下的定义捉住了有关概念的本质。罗素给普通语言中的陈述的逻辑形式作陈述的时候，也就是把普通语言翻译成人工语言的时候，他认为——至少在他的"蜜月期"（[1959]，第73页）——自己是以万无一失的直觉为向导的。波普尔在向本质主义发动有根有据的猛攻之际，对翻译定义这个重要问题注意得不够。想来，这可以解释他的[1947]第273页上有关逻辑形式的论述何以使我觉得不能令人满意。据他说（在这里他是效法塔尔斯基），有效推论的定义只取决于形成记号的清单。可是，一个直觉推论的有效性还要依赖于怎么把这个推论从普通语言（或算术语言、几何语言等等）翻译成逻辑语言，也就是说，依赖于我们采取什么样的翻译。

易卜西隆：连怪物也驳它不倒。

帖塔：这么说，你咬定了，不论我用什么来置换你那些一目了然的术语，定理仍旧是真的吧？

易卜西隆：向量代数专用的一目了然的术语，你尽可用任何字眼儿来置换。

帖塔：你那些非专用的初始术语，诸如“所有”、“并且”、“2”等等，我不能替换掉吗？

易卜西隆：不能。但是，你尽可用任何字眼儿替换我那些专用的一目了然的术语，诸如“顶点”、“棱”、“面”等等。我想，这总把我所谓反驳是什么意思讲清楚了吧？

帖塔：是讲清楚了。不过，果真如此的话，要么你这种见解就可反驳，要么你干的就跟你自以为在干的根本不是一码事。

易卜西隆：你影射什么，我不懂。

帖塔：非不懂也，是不愿懂也。你的反例观念特别之处，你讲得倒也仿佛头头是道。可是，如果反例是这么个东西，你那些“完全一目了然的术语”的原义就可有可无了。而这种原义，要是你的主张真有道理，恰恰该是你的证明的功绩。按你现在这个不可反驳的证明的概念本身，一个证明若是不可反驳，就不取决于专用的“完全一目了然的术语”的原义了。所以，假使你说得对，你的证明的耐力便丝毫不是由专用术语的意义造成的，而完全是由非专用的底层术语的意义造成的，就我们的例子而言，该是算术、集合论、逻辑造成的。

既然这类证明根本不依赖专用术语的意义，我要称之为形式证明。形式性的程度无疑要依赖取哪些术语作非专用术语。这些术语——我要叫做形成术语——能否做到一目了然，的确是很重要的。扣准了它们的意义，我们就好说什么能算反例、什么不可以。这样一来，我们就控制住漫无边际的反例了。如果

一个定理没有反例，按我的叫法，这个定理便是重言式，就我们的例子而言，该说是算术--集合论重言式。

阿尔发：我们似乎有各种强度迥异的重言式，全看如何选择准逻辑常项了。我看这里边有一大堆问题。先不先，我们怎么知道一个重言式是重言式呢？

卡帕：你永远不会知道底细，以至决无可能再起怀疑。不过，如果你对一种主宰理论起了郑重怀疑的话，只管将它抹掉，用另一种主宰理论替代便是。①

*编者按。在拉卡托斯的博士论文里，这节对话到此为止。想来我们会设法劝拉卡托斯沿下面的路线继续写这场对话。

---

① 主宰理论的变更意味着我们全部知识的改组。在古代，算术的悖理——而且简直就象是不一致——诱使希腊人放弃了曾是主宰理论的算术，而代之以几何。他们的比例论旨在把算术翻译成几何。他们深信，全部天文学、全部物理学也都能翻译成几何。

笛卡儿的大革新是用代数替代了几何：这也许是因为他认为在这种主宰理论中分析本身当可通向真理。

近代数学的"严格性革命"事实上不外是靠从哥西持续到魏尔斯特拉斯的数学算术化宏大纲领，重立算术为主宰理论。实数理论，尽管不少务实数学家感到是人为的，却成了举足轻重的一步，与希腊人的同样"人为的"比例论正相类似。

接着罗素又把逻辑弄成全部数学的主宰理论。把元数学的历史解释成探寻主宰理论的过程，也许会使这个学科的历史别开生面：我们也许能够说明，哥德尔所"发现"的算术在元数学中是天然的主宰理论这一事实直接导致了目前的研究状况，既给算术又给元数学开辟了新的前景。

引人注目的欧几里得式翻译的另一例是把概率论嵌入测度论这种摩登处理法。

主宰理论和主宰理论的变更也大大决定着一般科学的发展。理性力学作为物理的主宰理论，其加工制作与随后的土崩瓦解在近代科学史上起着中心作用。生物学反对被"翻译"成化学的斗争、心理学反对被翻译成生理学的斗争，则是当今科学史发人深省的特点。种种翻译工序犹如一座座巨型贮藏所，里边存着问题，也存着体现出博大的思想方式的历史趋势，与黑格尔的三段式相比，这些思想方式至少也是同等重要。这样的翻译照例是使主宰理论与被吞食理论的发展一起加快了，但随着翻译的弱点日益突出，后来却会变成进一步发展的障碍。

帖塔：不过，从方才说的道理似乎可以看出，如果我们能在若干以逻辑为主宰理论的系统中铸造自己的证明，那么，只要对我们的逻辑提不出郑重怀疑，我们就能够确信自己的演绎万无一失了，全部的怀疑也就不是倾注于实际的证明上，而只是倾注于引理上，定理的前件上了。

易卜西隆：我很高兴，至少帖塔终于开窍了。实话实说，我的证明能在一个以逻辑为其主宰理论的系统中铸造。把所有的引理都当作前件并入之后，条件陈述就能在这个系统中证明了。而且，我们知道，任何一个能这样证明的陈述，(相对于给定的一组"逻辑的"形成术语来说）确无反例。不管怎么改变描述术语的解释，这个条件陈述始终是真的。

兰勃达："我们知道"么？怎么知道呢？

易卜西隆：我们知道得不确实，因为这是一条关于逻辑的非形式定理。但是，更进一层说，我们还知道，每当一样东西被当成这类系统中的证明摆出来之后，我们总能用一种保证在有穷多步内得出答案的程序，纯机械地核查它是否确系证明。这么一来，你的"证明分析"在这类系统中就化为雕虫小技了。

阿尔发：不过，易卜西隆，你总该同意，在非形式数学里，"证明分析"还保留着它的重要性吧。而形式证明永远只是非形式证明的译本，所以，过去针对翻译提出的那些问题还是很实在的问题。

兰勃达：可是，易卜西隆，我们到底怎么知道证明核查永远可靠呢？

易卜西隆：真是的，兰勃达，你这种按捺不住的渴求确实性的热情越来越让人厌倦了！我得对你讲多少遍，我们确实知道的东西等于零呢？你的"确实欲"使你光提些讨人嫌的问题，对有趣味的问题反倒视而不见。

附录一　多证多驳法的另一案例研究

1. 哥西为“连续性原理”所作的辩护

多证多驳法是数学发现的一种很普遍的助探模式。然而，似乎只是在十九世纪四十年代它才被发现，甚至今天在许多人眼里它还象是悖理的，而且确实没有一个地方正式承认它的存在。在这个附录里，我想大概讲讲数学分析里一个证明分析的故事，找找理解它、承认它的抵抗力的来源。多证多驳法是怎么回事，我对笛卡儿-欧拉猜想的哥西证明所作的案例研究已经详加讲解，这里我先复述它的梗概。

数学发现——或非形式数学理论的生长——有一种简单的模式，由以下阶段组成：①

(1)原始猜想。

(2)证明(一个粗糙的思想实验或推论，把原始猜想分解成一些子猜想或引理)。

(3)“全局”反例(原始猜想的反例)涌现。

(4)复查证明：认出了全局反例构成其“局部”反例的“负罪引理”。这条负罪引理也许以往一直是“隐蔽的”，也许误与他物混同了。现在它被公开，被当作一个条件插进了原始猜想。

---

① 我强调过，实际的历史模式可以略微偏离这种助探模式。此外，(即使按助探论次序来说)第四阶段有时也可以先于第三阶段，因为一个别出心裁的证明分析也许会诱发出反例来。

定理——改进了的猜想——以证明生成的概念为其首要的新特点，使原始猜想报废。①

这四个阶段构成证明分析的主核。但有几个标准阶段往往接着出现：

(5)审查其他定理的证明，看看新找到的引理或新的证明生成概念在它们当中出现不出现。可能发觉这个概念处在不同证明的交叉路口，因而显出它有根本意义。

(6)核查前此采纳了的引自(现已驳倒的)原猜想的推断。

(7)反例转化为新理论的例子：开辟新的研究领域。

现在我愿意另作一个案例研究。在这个案例里，原始猜想是：任何连续函数收敛级数的极限本身也是连续的。头一个给这个猜想作证明的是哥西。在整个十八世纪，大家都以为这个猜想理所当然是真的，所以从没想到还需要作什么证明。它被看成了“到极限为止都真的，在极限上也真”这么一条“公理”的特殊情况。② 在哥西的名著[1821]里(第131页)这个猜想才连同证明一起出现。

既然这个“猜想”历来都看成平淡的真理，哥西为什么感到需要证明呢？有人批评过这个猜想吗？

---

① 编者按：换言之，这种方法（大体）是造一串陈述P_1，…，P_n，据估计，$P_1\&\ldots\&P_n$对人们关注的某一对象域是真的，同时似乎蕴涵原始猜想C。结果这也许不合事实，换言之，我们找到了C假而P_1至P_n成立的情况(“全局反例”)。这就促使我们清清楚楚讲出一条被该反例(“局部反例”)驳倒的新引理P_{n+1}。于是原证明换成了一个新证明，后者可总结为条件陈述

$$P_1\&\ldots\&P_n\&P_{n+1}\rightarrow C。$$

这个条件陈述的(逻辑)真实性不再受该反例攻击(因为前件现在成了假的，所以条件陈述真)。

② 惠威尔[1858]，1，第152页。惠威尔1858年还这么说，至少也落伍了十年。这个原理来源于莱布尼茨的连续性原理([1687]，第744页)。博耶在[1939]第256页引用了这个原理改头换面的一种典型说法，出自吕里埃[1786]第167页。

过一会儿自会明白，情况可不是那么简单。如今，得事后明见之便，我们看得出富里叶的工作已经给哥西猜想预备好了现成的反例。富里叶的《热传导研究报告》① 里就有一例，按现在的概念，是一个向哥西不连续函数趋近的连续函数收敛级数，那就是：

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots \quad (1)$$

然而，富里叶本人对这个级数的态度十分鲜明（与现代人态度不同也很鲜明）：

(1)他说，它处处收敛。

(2)他说，它的极限函数由一些分离的直线组成，每一条线都平行于X 轴，都等于圆周。这些平行线交错地处于轴的上方和下方，任何两条之间距离为 $\pi/4$，由垂直线相连，各垂直线本身也形成那条线的一部分。②

富里叶讲图象中垂直线的那几句话泄露了真情。他是把这些极限函数当成（某种涵义上的）连续函数了。说实在的，任何函数，只要能用一支不离开纸的铅笔画出它的图象，富里叶无疑要把它看成连续函数。可见，富里叶自己不会认为他造出了哥西连续性公理的反例。③ 只是根据哥西后来对连续性的刻划，某

---

① 经拉普拉斯、勒让德和拉格朗日评判，这份"研究报告"于1812年荣膺数学大奖。它是在富里叶的经典著作《热理论》之后才发表的，该书出版于1822年，比哥西的教科书晚了一年，但"研究报告"的内容当时早已是众所周知了。

② 富里叶，出处同上，第177和178节。

③ 写完这句话之后，我才发现，在普畦松（1807）和富里叶（1809）的一些至今未发表的手稿里，"不连续"这个术语大体按哥西那种涵义出现过。拉维茨博士当时正在研究那些手稿，他欣然应允我看了他的直接影印相片。这虽然没有驳倒我的见解，但确实使它碰到了麻烦。显而易见，在不同的时间，富里叶心中有过两个不同的连续性概念，这两个不同的概念无疑是从两个不同的领域很自然地产生的。象下面这样的函数：

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots,$$

如果我们把它解释成一根绳子的起始位置的话，它当然会被当成连续的，象哥西定

些富里叶级数中的极限函数才被看成不连续的，这些级数本身也才被视为哥西猜想的反例。既有这个反直观的新连续性定义之后，富里叶无辜的连续图似乎才一变而为确立已久的老连续原理的邪恶反例了。

哥西的定义把家喻户晓的连续性概念翻译成算术语言的办法，的确只会使“常识”摇摇欲坠。④ 按定义隐蕴的意思，一个连续函数，你只要把它的图象旋转一点点，就成了不连续函数。这又算是哪门子连续性哟？⑤

总之，如果用哥西概念代替了直觉的连续性概念，连续性公理就（也才？）真显得跟富里叶结果有矛盾了。这看上去象是反对哥西的新式定义（不光是连续性的定义，也还有极限之类的其他概念的定义）的一个强大的论据，或许是决定性的论据。那就无怪乎哥西想做给人看看，他的确能够按自己的新解释来证明连续性公理，也好拿出证据说他的定义满足得了这条最严厉的恰当性要求。他如愿以偿地提出了证明。他以为，这给了无意中向他的定义挑战的富里叶致命的一击，那个人确有才干，但只是一个毛毛糙糙、不讲严格性的半瓶子醋。

不言而喻，假使哥西的证明是正确的，那么，富里叶的例

义所要求的那样切掉垂直线似乎是不自然的。但是，如果我们把这个函数另作解释，比方说，解释成在表示一根铜丝上的温度，这个函数看来就显然不连续。这些考虑诱发了两个猜想。第一，哥西著名的连续性定义，既与函数的“绳子解释”背道而驰，说不定正是受富里叶热现象研究的刺激。第二，富里叶坚持这些（按“热解释”）不连续的函数的图象里有垂直线，说不定正是刻意以求不触犯莱布尼茨原理。

* 编者按：有关富里叶数学的更进一步的信息，见格拉坦-格林尼斯（与拉维茨合著）的《约瑟夫·富里叶（1768—1830）》一书（马萨诸塞理工学院出版社，1972）。

④ 也就是“绳子常识”或“图象常识”。

⑤ 编者按：这里破坏的或许不是直觉的连续性概念，倒是任何表示函数的图象轻微旋转之后仍然表示某函数的那种信念。富里叶的曲线从一种直觉的观点看是连续的，这种直觉用连续性的 ε-δ 定义（照例被人记在哥西名下）也照样能说明：因为，补全了垂直线的富里叶曲线可用两个连续函数作参数表示。

子，不论外观如何，也不会是真正的反例。表明它不是真正的反例的办法之一是摆出这么一个理由：那些级数表面上收敛于符合哥西涵义的不连续函数，其实根本不收敛！

在当时，这是个合乎情理的推测。富里叶本人对他的级数在这些临界情况的收敛性也有所怀疑。他曾经注意过收敛缓慢："收敛不够快，还得不出某种简易的逼近法，但足以保证等式是真的。"①

凭事后之明见，我们能看出，哥西指望富里叶级数在这些临界情况不收敛（因此不表示函数）也不无某一方面的道理，因为有以下的事实在：当极限函数不连续时，级数是趋近于$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$，而不是简单地趋近于$f(x)$；只有在$f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$的情况下，它才趋近于$f(x)$。不过，这在1829年之前是没人知道的。事实上，最初公意与其说是在哥西一边，倒不如说是在富里叶一边。富里叶级数仿佛安然无恙。到了1826年，哥西证明发表五年之后，阿贝尔在[1826b]的脚注里提到哥西定理有"例外"，② 此时此刻，便酿成了双方得胜还朝这种相当出奇的场面：富里叶级数被接受下来，但哥西令人震惊的连续性定义、他用这个定义证明的定理也被同等对待。

恰恰因为是双方得胜还朝，我们所考虑的那种特殊款式的连续性原理，在那时的人的眼里便成了这副模样：哥西固然将它证明得天衣无缝，但它必定也还有例外。

哥西一定得到了与阿贝尔一样的结论，因为，就在同一年，他一面理所当然决不放弃他对连续性作的刻划，一面却给出了

---

① 《热传导研究报告》，第177节。这句话当然还远远不等于他发现了在这些地方收敛是无穷慢的。这是积四十年计算富里叶级数的经验之后才作出的发现。在狄里希勒特对富里叶猜想作决定性改进，表明富里叶级数只能表示在不连续点上的值是$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$的函数之前，决不可能作出这个发现。

② 阿贝尔[1826b]，第316页。

富里叶级数收敛的证明。① 然而，这样的处境，他一定很不自在。《分析教程》第二卷始终没有发表。更可疑的是，连第一卷他也不出新版了，直到需要教科书的压力大得不堪，才准他的学生穆阿格诺把他给讲义加的注释拿去发表。②

既然富里叶级数这时被解释成反例了，分明就有了一个谜：证明了的定理怎么会是假的或"允许有例外"呢？在同一时期，欧拉定理——尽管已经证明了——的"例外"怎么成了人们的谜，我们早已作过讨论。

2. 赛德尔证明和证明生成的一致收敛概念

人人都感觉到了，这个哥西-富里叶案件不只是无害的谜，而且是新式"严格"数学的致命污点。狄里希勒特在论富里叶级数的名文里，③ 一心一意地精确说明连续函数收敛级数怎么会表示不连续函数，心里又明明晓得有个哥西款式的连续性原理，他却根本不提如此显而易见的矛盾。

识破哥西证明中负罪的隐蔽引理，最终解开哑谜，留待赛德尔去做。④ 及至做成，已是1847年了。为什么拖了那么久呢？想回答这个问题，只有把赛德尔的著名发现再仔细一点瞧上一瞧。

设 $\sum fn(x)$是一连续函数收敛级数。对任何n，规定 $S_n(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} f_m(x)$，$r_n(x) = \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} f_n(x)$。于是，哥西证明的要点便是从

① 哥西［1826］。这个证明基于一个假得无法矫正的假定（例如见黎曼［1868］）。

② 穆阿格诺［1840—1841］。

③ 狄里希勒特［1829］。

④ 赛德尔［1847］。

这个前提作出的一串推论：

给出任何 $\varepsilon>0$，

(1) 存在一δ，对任何b，如果$|b|<\delta$则$|S_n(x+b)-S_n(x)|<\varepsilon$(有这样的$\delta$是因为$S_n(x)$连续)；

(2) 存在一N，对所有$n\geqslant N$，$|r_n(x)|<\varepsilon$(有这样的 N 是因为$\sum f_n(x)$收敛)；

(3) 存在一N'，对所有$n\geqslant N'$，$|r_n(x+b)|<\varepsilon$(有这样的N'是因为$\sum f_n(x+b)$收敛)；

结论是：对所有 $b<\delta$，

$$
\begin{aligned}
&|f(x+b)-f(x)|\\
&=|S_n(x+b)+r_n(x+b)-S_n(x)-r_n(x)|\\
&\leqslant|S_n(x+b)-S_n(x)|+|r_n(x)|+|r_n(x+b)|\\
&<3\varepsilon。
\end{aligned}
$$

可是，收敛于哥西不连续函数的连续函数收敛级数既已提供了全局反例，足见这串推论(我们讲得很粗)总有什么地方错了。但负罪引理在哪儿呢？

作个稍微细心一点的证明分析(采用与上文相同的符号，只是把某些量之间的函数相关性写明白)，便得出下面的推论：

(1′) 如果$b<\delta(\varepsilon,x,n)$，$|S_n(x+b)-S_n(x)|<\varepsilon$；

(2′) 如果$n>N(\varepsilon,x)$，$|r_n(x)|<\varepsilon$；

(3′) 如果$n>N(\varepsilon,x+b)$，$|r_n(x+b)|<\varepsilon$；

所以，如果$n>\max_z N(\varepsilon,z)$而$b<\delta(\varepsilon,x,n)$，则

$$
\begin{aligned}
&|S_n(x+b)+r_n(x+b)-S_n(x)-r_n(x)|\\
&=|f(x+b)-f(x)|<3\varepsilon。
\end{aligned}
$$

隐蔽引理就是：对任何固定的ε，极大数$\max_z N(\varepsilon,z)$都应当存在。这正是后来所谓的**一致收敛性**要求。

在作出这个发现的道路上，大概有三大障碍。

第一个是哥西马马虎虎地用“无穷小”量。① 第二个是，即使有些数学家察觉这个证明里假定了无穷多个N中存在极大数，他们也完全可能不屑于三思就作这个假定。极大问题上的存在证明是在魏尔斯特拉斯学派中才首次出现的。而第三个障碍、主要的障碍，则是欧几里得方法论这种十九世纪早期数学兼善恶于一身的精神的盛行。

但是，泛论这种精神之前，让我们先看看阿贝尔怎么解决富里叶反例给哥西定理造成的问题。我要告诉大家，他是靠原始的“例外除外”法来解决(写成“解决”更好)这个问题的。

3. 阿贝尔的例外除外法

这个问题，我敢说是阿贝尔论二项级数的名文的基本背景问题，但他只在一条脚注里谈起。② 阿贝尔写道：“在我看来，哥西定理有一些例外”，然后立即举这么一个级数为例：

$$\sin\phi-\frac{1}{2}\sin2\phi+\frac{1}{3}\sin3\phi-\cdots ③$$

他还补充说：“谁都知道，诸如此类的例子多的是。”面对这些反例，他的反应是着手推测：“什么才是哥西定理的安全地带呢？”

他给这个问题的答案如下：泛言之，分析的定理，特言之，有关极限函数连续性的定理，其有效范围都局限于幂级数。这条基本连续性原理的一切已知例外都是三角级数，他便主张把分析撤进幂级数这个安全边界之内，扔下富里叶精心培植的三

---

① 这使哥西不能对他的老证明作清晰的批判鉴定，甚至不能在[1853]里（第454—459页）清晰地表述他的定理。

② 阿贝尔[1826b]，第316页。

③ 阿贝尔忘了该提一提，恰好就是这个例子早已被富里叶从这个角度提到了。

角级数不管，仿佛它们原就是一片无人管理的热带莽林——在那种地方，例外即是常规，合格倒算奇迹。

在1826年3月29日致汉施廷的信里，阿贝尔形容"可怜的欧拉式归纳"是导致无根据的假概括的方法，要追问这种搞法事实上很少闯祸的理由是什么。他的答案是：

> 我心想，理由就是在分析里大抵总跟能表示成幂级数的函数打交道。一当别的函数进入视野——这种事是有的，但难得有——[归纳]就再也不灵了；从这些假结论又得出无穷多的不对头的定理，一个牵出一个。我研究过其中的几个。我真够走运的，到底把这个问题解决掉了……①

在阿贝尔的文章里，我们找得到他的著名定理——我认定这是他拼命迎合莱布尼茨那条经典形而上学原理的结果——，但只取下列狭隘的形式：

如果级数

---

① 致汉施廷的信([1826a])。信的其余部分也挺有趣，也反映阿贝尔的例外除外法："按某种笼统的方法行事，倒不太难；但我得很小心谨慎，因为，在我心中，未经严格证明(等于未经任何证明)便被草草认可的种种命题扎根极深，每时每刻我都有失于详察而用上它们的危险。"因此，阿贝尔逐个核查了这些笼统的猜想，想方设法推测它们的有效范围。

这种以绝对清晰的幂级数作茧自缚的笛卡儿式的态度可以解释阿贝尔为什么格外关注泰勒展开式的严格处理："泰勒定理，全部无穷小演算的基础，根基不大牢靠。我只找到过一个严格的证明，就是哥西在《无穷小演算讲义提纲》中的那一个，他在书中证明了，如果级数是收敛的，就会有

$$\phi(x+a)=\phi(x)+a\phi'(x)+a^2\phi''(x)+\ldots;$$

可是，人们却到处漫不经心地滥用泰勒定理。"(致洪伯威的信[1825]。)

$$fa=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots+v_m\alpha^m+\cdots$$

对α的给定值δ是收敛的，它对每个小于δ的值也是收敛的；而且，对β的不断减少的值，函数$f(\alpha-\beta)$会无限制逼近$f\alpha$，假定α小于或等于δ。①

现代理性主义数学史家把数学史看作知识在不变的方法论基础上匀称生长的历史。他们推定，谁发现了一个全局反例，又提出了一个不致被有关反例驳倒的新猜想，谁就自动发现了相应的隐蔽引理和证明生成的概念。于是，这类历史学者就把发现一致收敛算成阿贝尔的功劳。所以，在权威性的《数理科学百科全书》里，普林斯海姆说，阿贝尔"证明了今天叫做一致收敛的那种性质的存在"。②哈代与普林斯海姆所见略同。他在文章[1918]里说"一致收敛观念隐约出现于阿贝尔著名定理的证明之中"。③ 布尔巴基的假话还要露骨。依他之见，哥西

最初并未察觉简单收敛与一致收敛有别，居然自以为有本领证明每个连续函数收敛级数均以一连续函数为其和。这错误几乎是当即便被阿贝尔揭穿了，后者就在同一时间证明了每个完全[?]级数在其收敛区间内部都连续，他靠的正是现已奉为经典的那种推理，其中使用的观念，就这个特殊情况而言，本质上正是一致收敛。剩下的唯一任务是对后一观念作一般剖析，系由斯托克斯和赛德尔于1847至1848年，哥西本人于

① 阿贝尔[1826b]，1，第314页。这段话是从德文转译的（克瑞勒把法文原文译成了德文）。*编者按：阿贝尔似乎忘记写α两边的括号了。

② 普林斯海姆[1916]，第34页。

③ 哈代[1918]，第148页。

1853年各自独立地完成的。①

句子何其多哉，错误何其多哉！阿贝尔并没有揭穿哥西将两种收敛视同一物的错误。他的证明从一致收敛概念捞到的油水并不比哥西证明多一分一毫。阿贝尔与赛德尔的结果并不存在“特殊”与“一般”的关系，而是处于截然不同的层次上。阿贝尔甚至并没有察觉，该受限制的不是入流函数的范围，倒是函数的收敛方式！说实在的，在阿贝尔眼里只有一种收敛，就是简单收敛；他的证明有以假乱真的确实性，奥妙全在他那些谨慎的(也是走运的)“下了等于不下的定义”②之中：如今谁都知道，就幂级数来说，简单收敛与一致收敛合而为一！③

这会儿我是在批评历史学家，我自然该提一句，哥西定理的第一个反例一般人都归功于阿贝尔。只有朱迪安注意到在富

---

① 布尔巴基[1949]，第65页；又见[1960]，第228页。

② 参见阿贝尔[1826b]，1，第24—30页。

③ 有两位数学家察觉阿贝尔证明并不是真的天衣无缝。一位是阿贝尔本人。他到底又一次死钻起这个问题来了，但还是徒劳一场，见于他身后发表的“论级数”一文([1881]，第202页)。另一位是西洛夫，即阿贝尔文集二版的第二编者。他给阿贝尔定理添了一条批注，指出证明中一定要假定一致收敛，不能象阿贝尔似的只假定简单收敛。但是，他没有用“一致收敛”这个术语，仿佛还不知道有那回事(约当的《分析教程》二版当时尚未问世)；他引用的倒是杜布瓦-瑞蒙稍后作的一个概括，反而只能显出连他也看不清裂缝的本来性质。赖夫在[1889]里否决了西洛夫的批评，论据可谓天真无邪：阿贝尔定理是有效的。赖夫说，哥西是收敛性理论的奠基人，而阿贝尔则是级数连续性理论的奠基人：

> 把哥西和阿贝尔的成就作个扼要总结，我们不妨说：哥西在他的《代数分析》中发现了无穷级数收敛性与发散性理论，阿贝尔在他的《二项级数论》中发现了级数连续性理论([1889]，第178—179页)。

1889年还说这种话，确乎是以无知自傲了。

不用说，阿贝尔定理有效全是靠很窄的“下了等于不下的定义”，不是靠他的证明。阿贝尔的文章稍后又发表于《奥斯特瓦尔德经典丛书》(第71册，莱比锡，1895)。在注释部分，西洛夫的按语照登不误，未加任何评论。

里叶手里就出现了。可是，由于受我们已经指出的那种目无历史的精神所左右，朱迪安竟由此推断，他钦佩万分的那位富里叶差不多要发现一致收敛概念了。① 迄今为止，一切历史学家都无视一个紧要之点：反例也许不得不经过战斗才能博得承认，被承认之后也还不见得就自动通达隐蔽引理，并由此通达有关的证明生成的概念。

4. 发现证明分析法的路障

现在还是回到主要问题吧。从1821年到1847年，起带头作用的数学家们为什么没能找出哥西证明里那条简单的裂缝，没能改进证明分析和定理呢？

最直接的回答是他们还不懂多证多驳法。他们还不知道，发现反例之后，应当细心分析自己的证明，设法找出负罪引理。他们对付全局反例还是借助于助探论上不结果的例外除外法。

事实上，赛德尔是一举成功，既发现了证明生成的一致收敛概念，又发现了多证多驳法。他完全意识到了自己在方法论上的发现，这在他的文章里讲得非常清楚：②

> 方才已经确认，定理不是普遍有效的，因此它的证明必定倚赖某个额外的隐蔽假定。有鉴于此，我们就要给证明作一次更细致的分析。发现那个隐蔽假设倒不很难。于是可以反推这个假设所表达的条件准

---

① 朱迪安[1912]，2，第527页。

② 理性主义者根本怀疑会有方法论上的发现。他们认为方法是不变的、永恒的。方法论上的发现者的确处境很糟。他们发现的方法被接受之前，仿佛怪僻理论论处；被接受之后，又按不足道哉的老生常谈论处了。

> 是表示不连续函数的级数满足不了的，因为，只有这样，那串别无他错的证明跟另一头的确凿事实才能重新归于一致。①

是什么阻碍赛德尔的上一辈发现这种方法？欧几里得方法论盛行是主要原因(我们已经提到过了)。

哥西严格性革命的动机就是要自觉谋求把欧几里得方法论应用到分析中去。②他和他的追随者认为，照这个法子做，他们能驱散"分析模糊一团的阴森气氛"，使它大放光芒。③哥西是按帕斯卡规则的精神行事的。他先设法把模糊的分析术语——象极限、收敛、连续性等等——都用人们熟悉之极的算术术语下定义，然后把以往不曾证明或尚非显然之极的一切东西都加以证明。但是，在欧几里得框架里，证明假的东西是不合规矩的。所以，哥西不得不先来改进数学猜想的存货，把假的垃圾抛进海里。为了改进猜想，他应用了搜寻例外而后把叙述草率的原猜想的有效范围限制到安全地带的方法，就是说，他应用了例外除外法。④

在《拉罗塞百科全书》1865版里，有位作者（大概是卡塔朗吧)相当刻薄地形容哥西搜寻反例的情景。他写道：

> 他带到科学里来的尽是些消极的说教……他小心翼翼想讲它个水落石出的东西，其实，几乎永远是总

---

① 赛德尔[1847]，第383页。

② "至于方法，我一定要使它们满足几何里要求的全部严格性，始终不求助于从代数通则引出的理由"(哥西[1821]，引言)。

③ 阿贝尔[1826a]，第263页。

④ "要给太广的论断加上有用的限制"(哥西[1821])。

算让他发现了的真理的消极方面。要是他居然在白垩粉里找到了一点点金子，他就会向全世界宣布：粉笔决不仅仅是由石灰碳酸盐做的。

阿贝尔致洪伯威的信里有段话是哥西学派这套新式剥心术的又一证据：

我已经开始从这个角度来审查（目前）照例得到批准的那些最重要的规则，说明它们在哪些情况不合适。这件事干得够顺当的，给了我无穷的乐趣。①

凡被严格主义者当作无指望的垃圾的，如有关发散级数之和的种种猜想，都被堂堂正正地付诸一炬。②阿贝尔写道，“发散级数是魔鬼的作品”，只会引起“祸害和悖论”。③

严格主义者只顾用例外除外一个劲儿在改进猜想方面下力气，从来没起过靠证明来改进的念头。推测与证明这两种活动被欧几里得传统硬性隔离。名副其实但仍无定局的证明是跟严格主义者格格不入的怪想。反例被他们看成奇耻大辱。要知道，一有反例，你的猜想就算错光了，你就只好从零开始再作证明。

这在那时是可以谅解的，要考虑到在十八世纪破破烂烂的归纳推理还被人叫做证明。④而那些“证明”是没法子改进的。那

---

① 阿贝尔[1825]，第258页。

② 同代人确实认为这场清洗“有点儿鲁莽”（哥西[1821]，引言）。

③ 阿贝尔[1825]，第257页。

④ 十八世纪的“形式主义”是地地道道的归纳主义。参见本附录第3节阿贝尔对归纳的批评。在[1821]前言里，哥西拒绝了归纳，说归纳只是“有时适于表现真理”。

些玩意儿“不是严格的证明，而这就等于说根本不是证明”，①有根有据地被一笔抹煞了。归纳推论或有一失嘛，所以该把它付诸一炬。演绎推理篡其位而自立，因为它才是万无一失哩。哥西当时宣布：“我使不确实的成分统统绝迹了”。② 正是在这样的背景之下，哥西“严格”证明了的连续性定理偏偏遭到了反驳，这就理应引起我们的重视。何况这个反驳并不是孤例。我们已经看见过了，哥西给欧拉公式作了严格证明之后，同样有一批文章指出有目共睹的“例外”。

只有两条出路：要么就修正给欧几里得方法垫底子的万无一失主义的数理哲学，要么就想个计策把问题捂住。让我们先看看，修正万无一失主义方案意味着什么。毫无疑问，那时候，谁也不能还以为全部数学都能还原为不容置疑的平淡真理、人总对某些陈述的真实性有决不会错的直觉。谁也不能还以为人的演绎或推论直觉是万无一失的。只有承认了这两条，才能够打开通道，让多证多驳法自由发展，让它被应用到演绎推论的批判鉴定上去，应用到如何对付反例的问题上去。③

只要反例还是一种耻辱，不光是烙在定理身上，也烙在拥护定理的数学家身上，只要证明与非证明还是二者必居其一，不

---

① 阿贝尔[1826a]，第263页。在哥西和阿贝尔看来，“严格的”就是指演绎的，与归纳相反的。

② 哥西[1821]，引言。

③ 编者按：这段话在我们看来是错的。拉卡托斯后来终于对形式演绎逻辑有了最高的敬意，我们不怀疑他自己也会改写这段话的。一阶逻辑给推论的有效性作出了某种刻划，（相对于给一种语言的“逻辑”术语作的刻划）它的确使有效推论成了本质上万无一失的。因此，拉卡托斯提到的两点里，只有第一点是必须承认的。经过充分好的“证明分析”之后，全部的怀疑都倾注于公理（或定理的前件），丝毫不存留于证明本身。多证多驳法决不会（象正文暗示的那样）因为拒不承认第二点就失效。其实，也许正是靠这种方法，证明才改进到如此地步，凡是为使证明生效所应作的假定都公开了。

准许有弱点的健全证明存在，数学批评总是要被除外。正是欧几里得方法的这种万无一失主义的哲学背景，养育了数学中权威性的陈规陋矩，禁绝了发表和讨论猜想的机会，堵塞了数学批评兴盛的可能。文学批评可以存在，因为我们可以欣赏一首诗而不以为它尽善尽美；数学或科学批评不可以存在，理由是我们只欣赏得出了尽善尽美的真理的数学或科学结果。只有在证明，证明才是证明；而证明要么就在证明要么就不在证明。赛德尔讲得够清楚了，不是天衣无缝的证明也可以是值得尊敬的，可是，这个观念在1847年是革命的，不幸，今天听起来依然是革命的。

无独有偶，多证多驳法发现于十九世纪四十年代，正好是牛顿光学垮台（通过非涅耳十九世纪十至二十年代的工作）和非欧几里得几何发现（罗巴切夫斯基于1829年，波莱于1832年）挫败了万无一失主义的自大狂的时候。①

发现多证多驳法之前，“严格证明了”的定理还有络绎不绝的反例的问题，只能靠例外除外法来“解决”了。证明是在证明定理，但又把什么是定理的有效范围这个问题给挂起来。我们可以靠列举和细心排除“例外”（这个婉辞是那个时期的特征）来规定这个范围。于是这些例外就写进了定理的行文。

例外除外法的横行一时使我们懂得了，在某些生死攸关的发问势态中，欧几里得方法怎么会对数学发展起毒害作用。这类发问势态大多出现在生长着的数学理论中，在那里生长着的概念是取得进步的手段，在那里最扣人心弦的发展靠的是勘探概念的边缘地区，是绷开概念，是把原先不区分的概念区分开来。在这些生长着的理论中，直觉还缺乏经验，要跌跤子，要犯错误。没有一个理论不经历这样的生长期；而且，这个时期从历史观点来看是最动人的，从教学观点来看也应当是最重要

的。不懂得多证多驳法，不采取或有一失主义方案，不可能真正理解这样的时期。

为什么欧几里得会成了缠身之鬼，尤其是数学历史与数学教学——无论是入门阶段还是创造阶段——的缠身之鬼？原因就在这里。②

---

① 也在这十年，黑格尔哲学与其万无一失主义先驱彻底断交，又为崭新的认识路线提供了强大开端。（黑格尔与波普尔代表近代哲学中仅有的两大或有一失主义传统，但连他们也都犯了给数学留下万无一失的特权地位的错误。）德摩根有一段话显示了四十年代或有一失主义的新格调：

"有时仿佛是定下了万全之计，凡有少许难处的东西，不全盘拒绝，就全然不下结论，不肯费点心思去审查似是而非的矛盾。如果那用意是说，凡不是在全部立论范围内成立的都不当经久使用、盲目信从，那么，至少我是不会对如此合理的方针持异议的。可是，如果言外之意是指，凡不可笼统理解原意的都不得传授给学生，无论是否有所提醒，那么，我就不以为然了。我要抗议给这类论断横加某种限制，据我的意见，这不仅难免使人错看了实际上确有所知的是什么，而且难免使发现过程停止前进。据说数学科学每一部分都是准确到了头的模范，作如是想者不乏其人，但超出了几何，却并不真。分析最远处的边界始终还是一知半解，边界外的旷野更属绝对无知。但是，要将稳定的国土扩大，龟缩于腹地总不是出路［这句话是针对例外除外法的］，唯有出海去发现才行。而且，我完全深信，应当按这种方式训练学生：就是说，要教他怎样耕耘腹地，同样也要教他怎样勘察边界。所以，在本书后面各章，我从不顾忌使用我自觉无可怀疑的方法，因为我讲明了这些方法未完成，也因为起怀疑的是心切的学员，不是感到不满的批评家。经验常常表明，有缺陷的结论倒是靠不懈的思考变成了易懂和严格的结论，可是谁会去指责永远不准他商榷的结论呢？一味注意数学中无疑点可切磋的部分，后果便是厌恶推广分析所绝对必要的各种处理方式。假使过去让受过专门训练的人开垦数学的高深部分，也许就能摆出点理由禁止普通学生染指这门抽象科学的未稳定部分，乃至纯思辨部分：而把这两部分留给另一种人，他们的本职正是要使前一部分清晰、使后一部分有用。然而，事实上，在这个国家，注意到了数学自身多少有些困难的人，由于爱好或环境方面的变故，只有少数干了自己的本行。这样的变故想必还会越来越多，因为，现在是只要有本事攻读应用数学高深部分的学生，都允许他们各有各的机会让人拉去开垦分析的高深部分，但这一部分与其说是关系到分析目前在物质科学中的应用，倒不如说是关系到分析未来的进步。"（德摩根［1842］，第vii页。）

按语：这个附录没有讨论多证多驳法的第五，六，七这三个补充阶段。这里我只想提一提，如果有条不紊地追查其他证明中是否用到一致收敛(第五阶段)，本来会很快驳倒和改进哥西所证明的另一个定理：任何连续函数收敛级数的极限的积分都是各项积分的序列的极限，简言之，对连续函数级数来说，极限运算与积分运算可互换。在整个十八世纪，这一点向无争议，甚至高斯也不加三思就用了。(见高斯[1813]，克诺普[1928]和贝尔[1945]。)

1847年发现了一致收敛的赛德尔，偏偏没想到瞧瞧其他证明，看其中是否隐约地假定了这个概念。同年发现一致收敛——虽然不是借助于多证多驳法——的斯托克斯竟在同一篇文章用了有关级数积分的那个假定理，是引自穆阿格诺的(斯托克斯[1848])。(斯托克斯还犯了一个错误：他自以为证明了一致收敛不只是极限函数连续的充分条件，而且是必要条件。)

级数积分也要依赖一致收敛假定的证明所以迟迟未发现，也许是由于那个原始猜想只是在1875年才被一个具体的反例驳倒(达尔布[1875])，当时早就用证明分析在哥西证明中寻找一致收敛的踪迹了，但这种分析无反例作触发剂。追查一致收敛这项工作一旦完全由魏尔斯特拉斯带头进行，立刻在有关逐项微分、双重极限等等的证明里发现了这个概念。

第六阶段是核查前此采纳了的引自(已被驳倒的)原始猜想的推断。能挽救这些推断么？还是说引理被驳倒招来了一场损失惨重的大破坏呢？比方说吧，逐项积分原是富里叶猜想的狄里希勒特证明的一块基石。杜布瓦-瑞蒙用戏剧性语言描写了当

② 据布雷思韦特说，"欧几里得，这位数学和无自我意识的科学的护身之神，成了科学哲学的——其实也是形而上学的——缠身之鬼。"(布雷思韦特[1953]，第353页。)然而，他这个评语出自一种静止的逻辑主义数学观。

时的局势。他说，三角级数理论已被“开肠剖肚”，它的两大关键性定理已被“釜底抽薪”

整个理论一下子被推回到狄里希勒特以前乃至富里叶以前的状态了。

（杜布瓦=瑞蒙[1875]，第120页。）看看“抽出的釜底之薪”是怎么塞回去的，这倒是一项极有趣的研究。

在这个过程中，滔滔不绝的反例涌出地面。但研究这些反例——多证多驳法的第七阶段——直到上世纪最后几年才开始。（例如，杨在非一致收敛点分类与分布方面的工作；见杨[1903—1904]。）

附录二　演绎主义方案与助探方案的对立

1. 演绎主义方案

欧几里得方法论发展了某种不可违抗的叙述体例。我要称它为"演绎主义体例"。这种体例一开始是不辞辛苦地列一张公理、引理和(或)定义的清单。公理和定义往往象是生造的，是复杂得神秘不堪的。无从得知这么复杂的东西是怎么钻出来的。跟在公理和定义清单后面的是措辞审慎的定理。其中塞满了繁而又繁的条件，看上去谁也不可能有幸瞎出这样的条件。跟在定理后面的是证明。

根据欧几里得的礼仪，学数学的都有义务小心侍候这套念咒的把戏，缄口不问背景，不问戏法是如何变成的。假使徒弟无意间发现有一些不雅观的定义是证明生成的，假使他不加掩饰地怀疑这些定义、引理、定理怎么会走在证明前面，那就暴露了他在数学上的幼稚，法师就要因此将他依法流放。①

按演绎主义体例，凡命题都真，凡推论都有效。这么一讲，数学就成了一个永恒不变的真理越装越多的集合。反例、反驳、批评严禁入场。开讲便是化装过的怪物除了外的证明生成

① 有些教科书声称，作者不期待读者有任何预备知识，只期待读者在数学上相当成熟。这话的真意往往是指，他们期待读者天生就有作欧几里得式论证的"能力"。对发问背景、对论证背后的助探过程则全无不合天性的兴趣。

定义，便是羽毛丰满的定理，什么原始猜想啦，反驳啦，证明换过的批评啦，都给封存起来了，因此，不用担心这个学科摆不出权威气派。演绎主义体例把斗争掩盖了，把冒险掩盖了。全部的来龙去脉都不见了，定理在证明过程中先后改换过的暂用表述命里注定要被埋没，而最终成品也就被捧成了万无一失的神物。①

有些维护演绎主义体例的人声称，演绎是数学中唯一的助探模式，发现的逻辑不外是演绎。② 另一些人明白这话不真，但明白之后又由此引出了数学发现全无理性可言的结论。于是，他们声称，尽管数学发现并非靠演绎进行，可是，如果想叫我们对数学发现的叙述按理性进行，也只好按演绎主义体例进

① 人们还不大明白，现今的数学与科学教育是权威主义的温床，是批判的独立思考最恶劣的敌人。这种权威主义在数学里奉行演绎主义模式，在科学里却是靠归纳主义模式显神通。

归纳主义体例在科学里有悠久的传统。照这种体例写的理想的文章一开始是不辞辛苦地描述实验设备，然后是描述实验和实验结果。文章结尾处也许是一个"概括"。发问势态、实验所要检验的猜想则藏而不露。作者以有一颗洁白的处女心自夸。看得懂文章的寥寥无几，因为真正了解发问势态的只有那么几个人。（归纳主义体例反映科学家想吹嘘他从一颗洁白的心开始研究的虚荣心，事实上他心中从一开始就充满观念。）这种把戏，耍的和看的都只能是一帮子挑选好的行家——也未必总是耍得转、看得懂。归纳主义体例正象它的演绎主义孪生兄弟一模一样（长相可不是一模一样！），自称有什么客观性，其实是在助长说秘传的行话，是在肢解科学、窒息批评、使科学权威化。按这样的叙述方式，反例永远不许出现。据说谁都是从观察（而非理论）开始，但是，显而易见，除非先有理论，谁也不可能观察到反例的。

② 这些人声称，数学家从一颗洁白的心开始，在闹着玩的自由创造活动中，凭他们的兴致设立公理和定义，只是到了偏后的阶段才从这些公理和定义演绎出定理。如果按某种解释公理真，那么定理也真。数学上真理的传送带是不会出漏子的。如果不承认数学只限于形式系统的话，在我们对证明过程作过案例研究之后，总的说来，这个维护演绎主义体例的论据就可以排除了。

波普尔说明断言归纳是科学发现逻辑的人错了，本短论的用意是说明断言演绎是数学发现逻辑的人也错了。波普尔批评了归纳主义体例，本短论则是试图批评演绎主义体例。

行。①

所以，时下有两种主张演绎主义体例的论据。一种论据的出发点是：助探论是合乎理性的和演绎主义的。第二种论据的出发点是：助探论不是演绎主义的，但也不是合乎理性的。

还有第三种论据。有些不喜欢逻辑学家、哲学家和其他怪癖狂干涉内政的务实数学家常说，引入助探体例，教科书就得重写，准会长得谁也无法从头读到尾。文章也要拉得很长很长。② 对这种世俗的论据的回答是：那就试试看吧。

2. 助探方案、证明生成的概念

这一节要给几个数学上重要的概念作简要的助探分析。希望这些分析会显示把助探成分引进数学体例的优越性。

我们已经提到了，演绎主义体例以人为的权威方式硬把证明生成的定义跟它们的"证明祖宗"扯开，把它们讲成从天上掉

---

① 这种说教是大多数牌号的形式主义数理哲学的一个重要部分。一谈到发现，形式主义者总要区分发现的方面与核正的方面。"发现的方面留给心理学分析，逻辑只过问核正的方面"（赖欣巴赫[1947]，第2页）。在布雷思韦特[1953]第27页上，甚至在波普尔[1959]第31—32页上和[1953]里，也能找到类似的观点。波普尔曾经把有关发现的问题分给心理学和逻辑而不给助探论这个独立研究领域留地位，当时（事实上是在1934年），他显然还不明白，他的"发现逻辑"是合乎逻辑的科学进步模式，但"合乎逻辑"不是只按严格意义来了解的。他的书名自悖其理的根源就在这里。那本书的论点似乎有两面：(a)培根和笛卡儿都错了，并没有科学发现的逻辑；(b)猜想和反驳的逻辑就是科学发现的逻辑。这个悖论的解法唾手可得：(a) 没有万无一失主义的科学发现的逻辑，即万无一失地得出结果的逻辑；(b)有或有一失主义的发现逻辑，这才是科学进步的逻辑。波普尔正是为这种发现逻辑奠定了基础的人，但对他的研究是什么性质这个元问题并无兴趣。所以他不明白这既非心理学又非逻辑，这是一门独立的学问，就叫发现逻辑，也就是助探论。

② 诚然，必须承认这样的文章会少得很，因为，一讲发问势态，就会过分明显地暴露相当多的文章说不到点子上去。

下来的，把引导人们发现它们的反例掩盖起来了。相反的，助探体例使这些因素非常明朗。它强调发问势态，就是说，强调生育新概念的“逻辑”。

让我们先看看怎么按助探体例引进证明生成的一致收敛概念，这是前面讨论过的（附录1）。讲这个例子和别的例子的时候，我们确实要假定读者已经熟悉多证多驳法的专门术语。但与通常要求读者熟悉公理、初始术语这类欧几里得纲领的专门术语相比，这也不算要求过高。

(a) 一致收敛

正题：莱布尼茨连续性原理的特定款式，说的是：任何连续函数收敛序列的极限函数都是连续的。(原始猜想)

反题：哥西的连续性定义把正题提到一个更高的水平。他的定义决策使富里叶的反例合法化。同时这个定义也排除了靠添垂直线来恢复连续性这种可能的折衷方案，于是与某些三角级数合在一起产生了反题的负极。“正极”被哥西证明强化了，后者将是一致收敛概念的证明祖宗。“负极”则被原始猜想的越来越多的全局反例强化了。

合题：识破了全局反例构成其局部反例的负罪引理，改进了证明，改进了猜想。合题的典型成分脱颖而出，这就是定理及与它相伴而行的证明生成概念“一致收敛”。①

这里我使用了黑格尔式的语言，据我想，一般说来，它是能够描述数学中形形色色的发展过程的。(然而，它既有魅力，也有危险。) 这套语言底层的黑格尔式助探论见解大体是这样的。数学活动是人类活动。如同任何人类活动一样，这种活动的某些方面可以由心理学来研究，另一些可以由历史学来研究。

助探论首先感兴趣的不是这些方面。但是，数学活动产生了数学。数学，这种人类活动的产物，从产生了它的人类活动中"使自身外化"。它变成一个活生生的生长着的有机体，摆脱产生了它的那种活动而获得某种自律性；它发展出了它自身的自律的生长规律，它自身的辩证法。这些规律只有在人类活动中才能实现它们自身，而真正的有创造性的数学家正是这些规律的人格化、肉身化。然而，它们的肉身化很难得是完善的。作为人的数学家的活动，当它在历史中出现的时候，只不过是数学理念的奇妙辩证法的一个正在盲目摸索的实现。不过，任何数学家，只要他有才干、有生气、有天资，就是与这种理念的辩证法息息相通的，就感受得到它扫荡一切的力量，就要遵照它

---

① 出于某种理由，在某些教科书里，一致收敛被挑选出来作例外的(准助探的)处理。比方说，鲁丁[1953]先设了一节，叫"主要问题的讨论"(第115页)，在其中提出了原始猜想和对它的反驳，然后才引进一致收敛的定义。他的叙述有两个缺点：(a) 鲁丁不是只摆出了原始猜想和对它的反驳，倒是追问起原始猜想是真是假了，而且用众所周知的例子说明了它假。可是，这么做，他就没有越出万无一失主义的体例：他的"发问势态"中并没有猜想，倒是有一个生编硬造的尖锐问题，后面跟着一个给出毅然回答的例子(不是反例)。(b) 鲁丁没有讲清一致收敛概念脱胎于证明，按他的叙述，倒是定义先于证明。既然跳不出演绎主义体例，也不能不如此，因为，假使他先给原证明，然后才给反驳，再继之以改进了的证明和证明生成的定义，他就暴露了"永远静止"的数学在运动、"万无一失"的数学或有一失，就跟欧几里得传统不一致了。(恐怕该补充一句，我坚持引鲁丁的书正因为它是符合这个传统的最佳教科书之一。)举鲁丁前言中的话为例："明确看出定理的假设是为保证结论有效所真正必需的，这看来很重要，尤其对初学者很重要。为此，正文包括相当多的反例。"不幸，这都是些乔装反例，其实只是例子，想显示聪明的数学家怎么把全部假设都收进了定理。他可不说这些假设是从哪里来的，是从证明计谋来的，不说定理不是从数学家脑袋里蹦出来的，不是象智慧女神雅典娜似的全副武装地从宙斯脑袋里出来。不能只看他用了"反例"这个词就犯迷糊，料定他在用或有一失主义的体例。* 编者按：拉卡托斯对鲁丁著作的评语全部是根据该书第1版。拉卡托斯引的话不是段段都能在1964年出的第2版找到。

的命令行事。①

可见，助探论过问的是自律的数学辩证法，不是数学史，虽然只有通过研究历史、通过按理性再造历史，它才能研究自己的对象。②

(b) 有界变分

分析教科书引进有界变分概念的通用办法是权威性演绎主义体例的一个模样挺标致的例子。我们重新拿起鲁丁的书吧。在他讲黎曼-斯蒂杰斯积分的那一章半当中，他突然引进有界变分函数的定义：

6.20.定义。令 f 定义在 $[a,b]$ 上。规定

(37) $$V(f)=\text{Lub}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_i-1)|,$$

此处 Lub 在 $[a,b]$ 的所有划分上来取。如果 $V(f)$ 是

---

① 这种黑格尔式的外化了的人类活动有自律性的观念，可以为思考有关社会科学，尤其是经济学的特质与方法论的某些问题提供线索。我将数学家理解为数学的不完善的人格化，与马克思将资本家理解为资本的人格化十分类似。不幸的是，马克思没有把他的见解加以限制，不强调这种人格化的不完善性，不强调这个过程的实现丝毫也不是铁定的。与马克思的看法相反，人类活动永远可以遏制或歪曲外化了的过程的自律性，也可以造成新的自律性。

② 编者按：我们觉得有把握说，拉卡托斯会在某些方面修改这段话，因为，随着他工作的进展，他的黑格尔主义背景的支配力越变越弱了。然而，他一如既往，相信承认人类求知活动的产物有局部自律性是起核心作用的。在那命题的客观内容构成的世界里（波普尔后来称作“第三世界”：见他的 [1972]），存在着不以我们是否承认其存在为转移的问题（例如，各命题在逻辑上不一致所引起的问题）；因此，我们可以发现（而非发明）理智上的问题。不过，拉卡托斯毕竟相信了，这些问题不“强求”有解，也不左右自身如何求解：倒不如说，为解决这些问题所必不可少的还是人类的创新能力（也许出现，也许不出现）。前一脚注对马克思的批评中就有这种观点的预兆。

有穷的，我们就说f是$[a,b]$上的有界变分函数，而称$V(f)$为f在$[a,b]$上的全变分。①

为什么我们正好该迷上这个函数集呢？演绎主义者的回答是：“拭目以待，观其后效”。好吧，咱们就拭目以待，聆听讲解，试观后效如何。定义过后是几个精心设计的例子，好让读者对概念的定义域有点观念（这种讲法，诸如此类的讲法，使鲁丁的书在演绎主义传统的圈子里成了突出的佳作）。然后是一串定理（6.22，6.24，6.25）；然后突然出现下面这个命题：

系理2．如果f是有界变分函数，g是在$[a,b]$上连续的，那么$f\in R^*(g)$。②

（$R^*(g)$是相对于g可积的黎曼-斯蒂杰斯函数的类。）

要是我们真正懂得了黎曼-斯蒂杰斯可积函数到底为什么如此重要，也许会对这个命题更感兴趣吧。但鲁丁甚至提都不提直觉上最显然的可积性概念，即哥西可积性，而正是对这个概念的批评引出了黎曼可积性的。总之，如今我们有了一条定理，里头出现两个神秘概念，有界变分与黎曼可积性。不过，两个神秘物相加并不等于理解。莫非对“有能力和嗜好追赶抽象思考的列车”的人，③这种加法可行？

助探的叙述方式会显出黎曼-斯蒂杰斯可积性与有界变分这两个概念都是证明生成的概念，来源于同一个证明：富里叶猜想的狄里希勒特证明。这个证明给出了两个概念的发问背

① 鲁丁[1953]，第99—100页。

② 同上书，第106页。

③ 同上书，前言。

景。①

富里叶的原始猜想②可没用什么神秘的术语。这个有界变分的"猜想祖宗"说，任意函数是可按富里叶级数展开的。③这真是个简单而又十分扣人心弦的猜想。这个猜想是由狄里希勒特证明的。④ 狄里希勒特细心审查了自己的证明，把各引理作为条件插入富里叶猜想，因而改进了那个猜想。这些条件便是大名鼎鼎的狄里希勒特条件。他得到的定理是，所有满足下列条件的函数都是可按富里叶级数展开的：(1) 在跳跃点上的值是 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$，(2)只有有穷多个间断点，(3) 只有有穷多个极大值和极小值。⑤

所有这些条件都是从狄里希勒特的证明里来的。只是在第三个条件上，狄里希勒特的证明分析不当，因为他的证明事实上仰仗的只是函数的有界变分。1881年约当批评了狄里希勒特的证明分析，改正了他的过错，因而变成了有界变分概念的发现者。可是，这个概念不是他发明的，也不是他"引进"的，⑥倒

---

① 这个证明也好，把它总结在一起的定理也好，鲁丁的书里其实都提到了，可是藏到了第8章习题17里（第164页），跟前文按权威方式引进的那两个概念彻底绝了缘。

② 富里叶[1803]，第112页。

③ "可按富里叶级数展开"是指"可展开成一个有富里叶系数的三角级数"。

④ 见他的 [1829]和 [1837]。这个证明的背景有许多有趣的侧面，不幸现在都不能深谈；例如富里叶原"证明"的价值问题，狄里希勒特随后两种证明的对比，还有狄里希勒特对哥西较早的证明([1826])的毁灭性批评。

⑤ 这里应当提一提，狄里希勒特证明并未以富里叶原猜想的反例为先导，也未受反例的刺激。没人举过任何反例；事实上哥西还"证明"过原猜想哩(参见第157页注①；他的证明的有效范围是空集)。多亏狄里希勒特证明的引理，尤其是头一条引理，才诱发出最早一批反例。这且不说，富里叶猜想的第一个反例也毕竟是1876年才由杜布瓦-瑞蒙摆出来的，他找出了一个不可按富里叶级数展开的连续函数。(杜布瓦-瑞蒙[1876]。)

⑥ 凭空"引进"概念是一种魔法，按演绎主义体例编写的历史乞灵于这种魔法是很常见的事。

不如说是他重作批判的审查时在狄里希勒特证明里发现的。①

狄里希勒特证明的另一个弱点是用了哥西积分定义，这种积分是只适合连续函数的工具。根据哥西定义，不连续函数根本不可积，而由于这个事实也就不是可按富里叶级数展开的。为了避开这个困难，狄里希勒特把不连续函数的积分看成函数有连续性的各区间上的积分之和。如果间断点数是有穷的，这很容易做，但如果是无穷的就引起困难。正因为如此，黎曼批评了哥西的积分概念，发明了一个新概念。

这样，有界变分与黎曼-斯蒂杰斯积分的两大神秘定理就还了本相，施不出权威性的魔法了；它们的来源都可以追溯到某种轮廓分明的发问势态，追溯到对以往的解题尝试的批评。前一定义是证明生成的定义，由狄里希勒特先作初步表述，最后才被狄里希勒特证明分析的批评者约当发现。后一定义来自对以往一个积分定义的批评，因为它被人看出无法应用到更复杂的问题上去。

我们介绍这个助探讲解法的第二例时，遵循的是波普尔猜想与反驳逻辑的模式。这种模式比黑格尔模式更贴近历史。黑格尔模式把"试试错错"给打发掉了，认为那是客观理念的必然发展在人类身上的一种纯属盲目摸索的实现。不过，即使是在波普尔牌号的理性助探论里，也必须区别立意要解决的问题与

---

① 见约当[1881]和[1893]第241页。约当本人强调，他修改的不是狄里希勒特的证明，只是他的定理。("……可见狄里希勒特的证明不必修改就能应用到每个振荡不大的函数……")然而，齐格蒙特却弄错了，据他说，约当定理与狄里希勒特定理相比"只是在外观上更一般"(齐格蒙特[1935]，第25页)。这种说法适用于约当的证明，不适用于他的定理。不过，说约当把狄里希勒特定理"推广"到有界变分函数这类范围更广的函数(例如舍克伐尔威-纳吉[1954]，第272页)，也同样引起误会。卡尔斯拉夫在[1930]历史导言里也表现出对证明分析缺乏理解。他没有察觉，狄里希勒特证明是有界变分这个证明生成概念的证明祖宗。

事实上解决的问题；也必须区别"偶然的"错误与"本质的"错误，前一种错误消失了就消失了，对它们的批评在今后发展中什么作用也不起；后一种被驳倒之后还会在某种意义上被保存，对它们的批评是今后发展的基础。在助探叙述里尽可略去偶然的错误而无所失，研究这些错误只是历史学的事情。

我们仅仅勾画了导致有界变分概念的全过程的前四个阶段。这里只提示一下这个引人入胜的故事的后半段。第五阶段，在其他证明中追查新找到的证明生成概念，结果立刻在"所有曲线可求长"这个原始猜想的证明中发现了有界变分。① 第七阶段把我们领到了勒贝格积分和现代测度论。

历史按语。我们可以给正文讲的故事添加一些助探论上挺有趣的细节。狄里希勒特深信，他的第二、三条引理的局部反例并不是全局反例；例如，他深信，所有连续函数都是可按富里叶级数展开的，与极大值和极小值的数目无关。他还希望，在他的证明里作些简单的局部更改就能证明这个更一般的结果。人们广泛接受了这样的观念：(1) 狄里希勒特证明只是部分的证明，(2) 作点小更改就能得到最终的证明。这种情况从1829年延续到1876年，那一年杜布瓦-瑞蒙造出了富里叶老猜想的第一个真正的反例，就此使这类小更改的希望归于幻灭。约当发现有界变分似乎受到了这个反例的刺激。

有件趣事值得一提：高斯也曾鼓励狄里希勒特改进他的证明，务求其适用于不拘有多少极大值与极小值的函数。妙得很，不论是1829年还是1837年狄里希勒特都没有解决这个问题，但1853年他仍然认为解法显而易见，居然在他应高斯之请所写的

① 这次发现，杜布瓦-瑞蒙又当了先驱（[1879]，[1885]），敏锐过人的约当又成了实际的发现者(约当[1887]，第594—598页和[1893]，第100—108页)。

复信里即兴草成(狄里希勒特[1853])。他的解法要点是这样的：极大值与极小值集在所考虑的区间中不得有任何凝聚点，这对他的证明来说其实是一个充分条件。至于他谈到间断点有穷多的第二个条件，他在1829年写的头一篇文章里早已说过可以更改。他曾在文章里断定，事实上只要间断点集无一处稠密，他的证明便适用。这些修改告诉我们，狄里希勒特十分关心如何分析他的证明的问题，深信它适用的函数比满足他那些谨慎的条件——后人称之为狄里希勒特条件——的函数要多。他在[1837]里根本就不陈述定理，这很能说明他的态度。他始终深信自己的定理对所有的连续函数都成立，他给高斯的信是明证，他亲口告诉颇有怀疑派之嫌的魏尔斯特拉斯的话也如出一辙。(参见《奥斯特瓦尔德精密科学经典丛书》，186册，1913年，第125页。)

要知道，他在[1829]里陈述的定理其实是囊括了“自然界中出现”的一切类型的函数的。再作更进一步的更精致的分析，就会跨入很“纯粹”的分析领域了。我敢说，对狄里希勒特证明的分析——以黎曼为最早——是现代抽象分析的开端。最近大家广泛接受了朱迪安的见解，以为富里叶起了决定性作用，我觉得这是夸大其辞。富里叶这个人，对超出直接应用的数学论证全无兴趣。狄里希勒特的思路的确不同。他模糊地感觉到了，分析他的证明需要一个新的概念框架。他的文章[1829]里最后那句话是一个中肯的预言：

> 可是，想把这件事搞得清清楚楚，尽如人愿，需要加上一些与无穷小演算基本原理密切相联的细节，这些细节要在另一篇附记中讲到……

可是，他一直没有发表他答应写的附记。是黎曼批评了哥西积分概念，才澄清了“与无穷小演算基本原理密切相联的细

节”；是黎曼有条不紊地讲清了狄里希勒特的模糊感觉，又引进了一套革命的技术，才把数学分析，其实也才把理性推进到一批函数所在的地带，这批函数在自然界中不出现，历来被看成怪物，至多也只是无趣的例外或“奇异函数”而已。（这正是狄里希勒特的态度，他的文章[1829]和他给高斯的信里都表露过的。）

在这里，有些万无一失主义的数学史家施展了目无历史的花招，把一段漫长的充满斗争和批评的发展过程压缩成了孤零零一次万无一失的顿悟，把后世分析学者才有的成熟程度赋与了狄里希勒特。这些反历史的历史学家把现代的一般实函数概念归功于狄里希勒特，因此把这个概念命名为狄里希勒特函数概念。贝尔在[1945]第293页上断言，“狄里希勒特给一个（实数值）变元的（数值）函数下的定义是把它当作一张表，或者当作两个数集之间的对应或相关，这暗示了某种点集等价论”。贝尔要人参考“狄里希勒特：《全集》，1，第135页”。可是，那里并没有诸如此类的东西。布尔巴基说：“谁都知道，就在狄里希勒特把富里叶的思想精确化的时候，他趁机给一般函数概念下了定义，跟我们今天所理解的是一样的。”（布尔巴基[1960]，第247页。）布尔巴基说是“谁都知道”，却不提任何参考文献。在大多数经典教科书里都找得到实函数概念“出自狄里希勒特”这种说法（例如皮尔庞特[1905]，第120页）。可是，在狄里希勒特的著作里根本就没有这样的定义，倒是有充分证据说他对这个概念一无所知。比方说，在他的文章[1837]里，讨论到分段连续函数的时候，他竟然说函数在间断点上*有两个值*：

这条曲线由若干段组成。我们把它的x与y坐标分别记为β与$\phi(\beta)$。在x轴上方与β的某些特殊值对应的点上，曲线的相邻部分是隔断的：每个这样的x坐标事实上有两个y坐标同它对应，

其中一个属于到该点止的部分，另一个属于由该处始的部分。下文有必要区分 $\phi(\beta)$ 的这两个值；我们要把它们记为 $\phi(\beta-0)$ 与 $\phi(\beta+0)$。

这些引文表明狄里希勒特距离“狄里希勒特函数概念”多么远，容不得有半点合理的怀疑了。

把狄里希勒特跟“狄里希勒特定义”扯到一块的人，照例要想到他的文章[1829]最后一页上出现的狄里希勒特函数，即 x 是有理数时它是0、x 是无理数时它是1的函数。麻烦之处又是狄里希勒特仍旧主张所有真正的函数事实上都是可按富里叶级数展开的，足见他明明是把这个“函数”当怪物设计出来的。照狄里希勒特的看法，他的“函数”不是“普通”实函数的一个例子，而是名不副实的函数的一个例子。

妙得很，竭力叫人注意子虚乌有的狄里希勒特函数定义的人，偏偏不注意他那两篇文章的标题说的就是任何“完全任意的”函数展开成富里叶级数的问题。这就意味着，照狄里希勒特的看法，狄里希勒特函数是在这个“完全任意的函数”的家族之外的；这就意味着，他是把它看成怪物的，因为，“普通”函数非得有一个积分不可，而这玩意儿显然没有。黎曼批评哥西积分概念以及狄里希勒特作的顾此失彼的更改的时候，其实是批评了狄里希勒特狭隘的函数概念。黎曼告诉人们，在每个形如 $p/2n$ 的有理数上都不连续的函数（此处 p 是奇数，与 n 互素），尽管在一处处稠密集上不连续，但只要我们加宽积分概念，就连这样的怪物也是可积的。因此，这个与狄里希勒特函数如此雷同的函数是普通函数。（黎曼对积分概念的推广丝毫不是“任意的”；他迈出的革命性的一步是，不再去问哪一种函数是可按富里叶级数展开的，而去问哪一种函数是三角级数所表示的。他的目

标是大大扩充积分概念，让所有构成三角级数之和的函数都务必成为可积的，从而成为可按富里叶级数展开的。这是概念工具主义的一个十分漂亮的事例。)

这里或许该认一认狄里希勒特建立了“狄里希勒特函数定义”这个谣言的始祖是谁。这个人就是汉克尔。他分析函数概念发展的时候([1882]，第63—112页)，解释了富里叶的结果怎么破除了老的函数概念，然后接着说：

> 剩下的事情只是，第一，删去函数应有解析式这个条件，理由是这个条件无关紧要；第二，割掉那只瘤子的同时，作如下的精释：y叫做x的函数，如果变元x在某区间内的每个值都有y的一个确定的值同它对应，不论y是否在整个区间内按同一规律依赖于x，也不论这种依赖关系是否能用数学运算来表示。这个纯名义的定义，我要归诸于狄里希勒特，因为它的基础是狄里希勒特论富里叶级数的工作，正是这项工作证明了老概念站不住脚……

(c) 卡拉西奥道里可测集定义

从演绎主义方案转到助探方案确有困难，但有一些教现代数学的教师已经明白需要转了。让我们瞧一个例子。在现代测度论或概率论教科书里，我们经常跟卡拉西奥道里可测集的定义迎面相遇：

> 设μ^*是一可传δ-环H上的外测度。H中的集合E是μ^*-可测集，如果对于H中的每个集合A，
>
> $$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E')。$$①

① 哈莫斯[1950]，第44页。

这个定义，按原貌来说，势必令人百思不得其解。当然，永远有一条轻松的路可走：数学家喜欢怎么定义自己的概念就怎么定义。不过，严肃的教师是不肯这等轻松地溜之大吉的。他们也不会说，这才是可测性的正确、真实的定义，有成熟的数学洞察力理应把它看成这样的东西。事实上，他们照例是给一个颇含糊的提示，说我们应该瞧瞧后面由定义引出的各种结论："定义是教条；只有从定义引出的各种结论才能给我们新的洞察力"。① 所以，我们只能先信奉定义，再看看发生什么事情。虽然这还有权威在手的气味，至少不失为懂得问题在哪里的一种征兆。这总算是一种辩解，即使仍然是权威性的辩解。让我们引用哈莫斯给卡拉西奥道里定义作的辩解："关于 μ^*-可测性的意义，除非熟悉后文打算——发挥的它的义蕴，想有直觉的理解是相当难的"，② 然后他接着说：

> 不过，下面这个评注也许有点帮助。一个外测度不必是可数可加的集函数，更不必是有穷可加的。但可加性这条合理要求总得设法满足，所以我们把可加地分割其他一切集合的那些集合挑出来。μ^*-可测性的定义就是要准确表述这种相当粗疏的描写。这个概念表面上挺复杂，然而有一个能核正它的最大理由，就是在证明 § 13 里那条重要而有用的扩张定理时，用它作工具，取得了绝对完满的成功，尽管这可能是令人惊

---

① 曼格尔[1928]，第76页。波普尔在[1959]第55页上以赞同的语气引用过这句话。

② 哈莫斯[1950]，第44页。

奇的。①

这个核正的前一部分，“直觉”部分，可有点误人子弟。因为，从后一部分就弄懂了，这个概念是个证明生成的概念，出现在卡拉西奥道里的测度扩张定理中（哈莫斯要到下一章才引进那个定理）。所以，它是否合直觉根本无所谓。它的真正理由不在它的直觉性上，而在它的证明祖宗上。总不该硬把证明生成的概念跟它的证明祖宗扯开；它在助探论上是由证明派生的，总不该在证明的好几节乃至好几章之前就摆出来。

在洛伊夫的[1955]里，这个定义摆得很是地方，摆在他讲测度扩张的那一节，看成扩张定理中需要的一个概念：“我们将来需要各式各样的概念，这里先收集拢来。”② 可是，这堆复杂透顶的工具里，他究竟怎么会知道哪一些是将来干活所需要的呢？不用说，他早已盘算好了将来他要找出什么，将来他要怎么做法。那又何必故作神秘，把定义放在证明前头呢？

很容易举出更多的实例来印证：讲出原始猜想、亮出证明、摆出反例而后按助探次序上升到定理和证明生成的定义，会驱散笼罩着抽象数学的那种权威无上的神秘主义，会收到制止蜕化的实效。给这种蜕化现象作上两三个案例研究，对于数学，必定功德无量。不幸，演绎主义体系和肢解数学知识的趋势在很大程度上还在保护“蜕化的”文章。

① 哈莫斯[1950]，第44页。

② 洛伊夫[1955]，第87页。

书　目

译者按：1963—1964年拉卡托斯在《不列颠科学哲学杂志》发表同名短论时自己编过一个书目。本书的书目经格雷戈里·柯里修正和补充。我的翻译，除注明作品的语种外，维持原貌。作者原名先行列出，无异于提供了不完备的原名与译名对照表。文集编者和出版社名称不译，也许反便于查阅。已有的汉译本一律不注，不仅因为有的太旧或太不可读，主要还是因为本译者从来未引以为据。真正有志于科学哲学的研究者，当然会象拉卡托斯一样，只信赖原著，想来不致"深感遗憾"吧！

Abel, N. H.

阿贝尔[1825]"致洪伯威的信"(英文)，收入S.Lie和L.Sylow所编《全集》，第2卷，克里斯蒂安尼亚(奥斯陆旧名)：Grφndahl，1881年，第257—258页。

阿贝尔[1826a]"致汉施廷的信"(英文)，收入S. Lie和L. Sylow所编《全集》，第2卷，克里斯蒂安尼亚：Grφndahl，1881年，第263—265页。

阿贝尔[1826b]"级数$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{2}x^2+\frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^3\cdots$的研究"(德文)，《纯粹数学与应用数学杂志》，1，第311—339页。

阿贝尔[1881]"论级数"(法文)，收入S. Lie和L. Sylow所编《全集》，第2卷，克里斯蒂安尼亚：Grφndahl，第197—205页。

Aetius

埃修斯[约150]　《学述》(拉丁文)，收入H. Diels所编《希腊学说》. 伯罗里尼. Reimeri, 1879年。

Aleksandrov, A. D.

亚历山大罗夫[1956]　"数学概观"(俄文)，载于A. D. Aleksandrov, A. N.Kolmogorov 和M. A. Lavrent'ev所编《数学：它的内容、方法和意义》(S. H. Gould, K. A. Hirsch和T. Bartha的英译本，马萨诸塞州剑桥：M. I. T. Press, 1963年)。

Ambrose, A.

安布罗斯[1959]　"证明与所证定理"(英文)，《心》，68，第435—445页。

Arber, A.

阿尔伯[1954]　《心与眼》(英文)，剑桥：Cambridge University Press。

Arnauld, A. and Nicole, P.

阿诺德和尼科尔[1724]　《逻辑，或思维艺术》(法文)。里尔：Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de l'Université de Lille, 1964年。

Bacon, F.

培根[1620]　《新工具》(拉丁文)。英译本，载于R. L. Ellis和J. Spedding所编《弗兰西斯·培根的哲学著作》。伦敦：Routledge, 1905年，第241—387页。

Baltzer, R.

巴采尔[1862]　《数学要义》(德文)，第2卷，莱比锡：Hirzel。

Bartley, W. W.

巴特利[1962]　《以一厢情愿为退路》(英文)，纽约：Alfred A. knopf。

Becker, J. C.

贝克尔[1869a]　"论多面体"(德文)，《数学与物理学杂志》，14，第65—76页。

贝克尔[1869b]　"论多面体一文补遗"(德文)，《数学与物理学杂志》，14，第337—343页。

贝克尔[1874]　"关于多面体表面的一个基本命题的新证明和推广"(德

文)，«数学与物理学杂志»，19，第459-460页。

Bell, E. T.

贝尔[1945] «数学的发展»(英文)。第2版。纽约：McGraw-Hill。

Bérard, J. B.

贝哈德[1818-1819] "论方程的虚根数：读Tédenat与Servois先生文章有感"(法文)，«纯粹数学与应用数学纪事»，9，第345—372页。

Bernays, P.

伯奈斯[1947] 评玻亚[1945](英文)，«辩证法»，1，第178—188页。

Bolzano, B.

波尔查诺[1837] «科学论»(德文)。莱比锡：Meiner，1914—1931年。

Bourbaki, N.

布尔巴基[1949] «一般拓扑»(法文)。巴黎：Hermann。

布尔巴基[1960] «数学史纲»(法文)。巴黎：Hermann。

Boyer, C.

博耶[1939] «微积分的概念»(英文)。纽约：Dover，1949年。

Braithwaite, R. B.

布雷思韦特[1953] «科学解释» (英文)。剑桥：Cambridge University Press。

Brouwer, L. E. J.

布劳维[1952] "直觉主义的历史背景，原则和方法"(英文)，«南非科学杂志»，49，第139—146页。

Carnap, R.

卡尔纳普[1937] «语言的逻辑语法»(英文)。纽约和伦敦：Kegan Paul。(译自*Logische Syntax der Sprache*，维也纳：Springer，1934年，有所修订。)

Carslaw, H. S.

卡尔斯拉夫[1930] «富里叶级数和积分理论导引»(英文)。第3版。纽约：Dover，1950年。

Cauchy, A. L.

哥西[1813a] "多面体探讨"(法文)，«理工学院杂志»，9，第68—86页。

(1811年2月宣读。)

哥西[1813b] “论多边形与多面体”(法文)，«理工学院杂志»，9，第87—98页。(1812年1月宣读。)

哥西[1821] «皇家理工学院分析教程»(法文)，巴黎：de Bure。

哥西[1826] “函数展开为周期级数的研究报告”(法文)，«科学院研究报告»，6，第603—612页。

哥西[1853] “释一类收敛级数，其各项均为给定界限内只含实变项而不含复变项的连续函数”(法文)，«科学院会议每周通报»，37，第454—459页。

Cayley, A.

凯利[1859] “论庞索特的四种新正则立体”(英文)，«伦敦、爱丁堡和都柏林哲学与科学杂志»，第4辑，17，第123—128页。

凯利[1861] “论闭图形的分类”(英文)，«伦敦、爱丁堡和都柏林哲学与科学杂志»，第4辑，21，第424—428页。

Church, A.

丘奇[1956] «数理逻辑引论»(英文)，第1卷。普林斯顿：Princeton University Press。

Clairaut, A. C.

克莱洛[1741] «几何要义»(法文)。巴黎：Gauthier-Villars。

Copi, I. M.

考丕[1949] “现代逻辑与先验综合陈述”(英文)，«哲学杂志»，46，第243—245页。

考丕[1950] “哥德尔与先验综合陈述：答辩”(英文)，«哲学杂志»，47，第633—636页。

Crelle, A. L.

克瑞勒[1826—1827] «几何原理教科书»(德文)，第1、2卷，柏林：Reimer。

Curry, H. B.

柯里[1951] «形式主义数理哲学概论»(英文)，阿姆斯特丹：North Holland。

Darboux, G.

达尔布[1874a] “1月12日致Houel的信”(法文)。(摘录见F. Rostand:《数学家们对精确性的关注及其忧虑》。巴黎：Librairie Philosophique J. Vrin, 1960 年，第11页。)

达尔布[1874b] “2月19日致 Houel 的信”(法文)。(摘录见F. Rostand:《数学家们对精确性的关注及其忧虑》。巴黎：Librairie Philosophique J. Vrin, 1960年，第194页。)

达尔布[1875] “不连续函数研究报告”(法文)，《高等师范学院科学纪事》，第2辑，4，第55—112页。

达尔布[1883] “9月2日致 Houel的信”。(摘录见F. Rostand:《数学家们对精确性的关注及其忧虑》。巴黎：Librairie Philosophique J.Vrin, 1960年，第261页。)

Denjoy, A.

当若依[1919] “数学的现实方针”(法文)，《每月评论》，20，第18—28页。

Descartes, R.

笛卡儿[1628] 《指导心灵的规则》(拉丁文)。英译本，载于E. S. Haldane和G. R. T. Ross 所编《笛卡儿的哲学著作》，第1卷，剑桥：Cambridge University Press, 1911 年。

笛卡儿[1639] 《立体的要素》(拉丁文)。(最初发表于Foucher de Careil:《笛卡儿未出版的著作》，第2卷，巴黎：August Durand, 1860年，第214—234 页。经显著改进的文本见 C. Adam 和 P. Tannery 所编《笛卡儿全集》，第10卷，第257—278页。巴黎：Cerf, 1908年。)

Dieudonné, J.

狄厄多内[1939] “现代公理方法与数学基础”(法文)，《科学评论》，77，第224—232页。

Diogenes Laertius

第欧根尼·拉尔修[约200] 《著名哲学家》(拉丁文)。附R. D. Hicks 的英译文。第2卷，伦敦：Heinemann, 1925年。

Dirichlet, P. L.

狄里希勒特[1829] “论表示给定界限内任意函数的三角级数的收敛性”(法文)，《纯粹数学与应用数学杂志》，4，第157—169页。

狄里希勒特[1837] “论用正弦与余弦级数表示完全任意的函数”(德文)，载于H. W. Dove 和L. Moser 所编《物理学报告》, 1, 第152—274页。
狄里希勒特[1853] “1853年2月20日致高斯的信”，收入 L. Kronecker 所编《全集》，第2卷，第385—387页。柏林：Reiner，1897年。
du Bois-Reymond, P. D. G.
杜布瓦-瑞蒙[1875] “证明:三角级数$f(x)=\sum_{p=0}^{p=\infty}(a_p\cos px+b_p\sin px)$的系数有值

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\alpha f(\alpha),\ a_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\alpha f(\alpha)\cos p\alpha,$$

$$b_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\alpha f(\alpha)\sin p\alpha,$$

只要它们是有限定积分”(德文)，《刻尼希-巴威利科学院论文集：数学-物理学类》，12，1，第117—166页。
杜布瓦-瑞蒙[1876] “富里叶表达式的收敛性与发散性研究”(德文)，《刻尼希-巴威利科学院论文集：数学-物理学类》，12，2，第i—xxiv页和第1—102页。
杜布瓦-瑞蒙[1879] “释变分法初阶”(德文)，《数学纪事》，15，第282—315页，第564—576页。
杜布瓦-瑞蒙[1885] “论曲线长度概念”(德文)，《数学录》，6，第167—168页。
Dyck, W.
狄克[1888] “位置分析论稿”(德文)，《数学纪事》，32，第457—512页。
Einstein, A.
爱因斯坦[1953] “致希尔普的信”。发表于 P. A. Schilpp: “哲学的让位”(英文)，《康德研究》，51，第490—491页，1959—1960年。
Euler, L.
欧拉[1756—1757] “在纯粹数学中运用观察的范例”(拉丁文)，《彼得堡科学院新评论》，6，第185—230页。编者提要，第19—21页。
欧拉[1758a] “立体学说要义”(拉丁文)，《彼得堡科学院新评论》，4，第

109--140页。(1750年11月宣读。)

欧拉[1758b] “多面体所具有的若干显要性质的证明”(拉丁文),《彼得堡科学院新评论》,4,第140—160页。(1751年9月宣读。)

Eves, H. and Newsom, C. V.

伊夫斯和纽森姆[1958] 《数学基础与基本概念引论》(英文)。纽约:Rinehart。

Félix, L.

菲利克斯[1957] 《现代数学面貌》(法文)。(J.H. Hlavaty和F. H. Hlavaty的英译本,纽约:Basic Books, 1960年。)

Forder, H. G.

福德尔[1927] 《欧几里得几何基础》(英文)。纽约:Dover, 1958年.

Fourier, J.

富里叶[1808] “固体内热传导研究报告(摘要)”(法文),《巴黎数学会科学新讯》,1,第112—116页。

Fréchet, M.

弗雷歇[1928] 《抽象空间》(法文)。巴黎:Gauthier-Villars。

弗雷歇[1938] “一般分析与基础问题”(法文),载于F.Gonseth所编《苏黎世语录:谈数理科学的基础和方法》,苏黎世:Leemans Frères et Cie, 1941年,第53—73页。

Frege, G.

弗雷格[1893] 《算术基础》(德文),第1卷,希尔德斯海姆:George Olms, 1962年。

Gamov, G.

伽莫夫[1953]《从一,二,三,……到无穷》(英文),纽约:The Viking Press。

Gauss, C. F.

高斯[1813] “泛论无穷级数

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x\cdot x$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot x^3+\cdots\text{”}$$

(拉丁文)，收入《全集》，第3卷，第123—162页。莱比锡：Teubner。

Gergonne, J. D.

日果内[1818] “定义理论简论”(法文)，《纯粹数学与应用数学纪事》，9，第1—35页。

Goldschmidt, R.

戈德施米特[1933] “进化的若干方面”(英文)，《科学》78，第539—547页。

Grunert, J. A.

格龙宗特[1827] “哥西与欧拉所发现的网络图与多面体定理的简化证明”(德文)，《纯粹数学与应用数学杂志》，2，第367页。

Halmos, P.

哈莫斯[1950] 《测度论》(英文)。纽约和伦敦：Van Nostrand Reinhold。

Hankel, H.

汉克尔[1882] “无穷多次振动的连续函数研究”(德文)，《数学纪事》，20，第63—112页。

Hardy, G. H.

哈代[1918] “乔治·斯托克斯先生与一致收敛概念”(英文)，《剑桥哲学会会刊》，19，第148—156页。

哈代[1928] “数学证明”(英文)，《心》，38，第1—25页。

Haussner, R.

豪斯纳(编)[1906] 《正则星状体文集》(德文)。《奥斯特瓦尔德精密科学经典丛书》，第151册，莱比锡：Engelmann。

Heath, T. L

希斯[1925] 《欧几里得原本十三卷》(英文)。第2版。剑桥：Cambridge University Press。

Hempel, C. G.

亨普尔[1945] “证实逻辑研究：1，2”(英文)，《心》，54，第1—26页和第97—121页。

Hermite, C.

埃尔米特[1893] “1893年5月20日致斯蒂杰斯的信”(法文)，收入B. Baillaud和H. Bourget所编《埃尔米特与斯蒂杰斯通信集》，2，第

317—319页。巴黎：Gautheirs-Villars, 1905年。

Hessel, J. F.

赫塞尔[1832] "欧拉多面体定理补论"(德文)，《纯粹数学与应用数学杂志》,8，第13—20页。

Heyting, A.

海丁[1939] "从直觉主义观点看数学基础"(法文)，载于F. Gonseth:《数理哲学》，巴黎：Hermann，第73—75页。

海丁[1956] 《直觉主义导论》(英文)。阿姆斯特丹：North Holland。

Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S.

希尔伯特和康福森[1932] 《直观几何》(德文)。柏林：Springer。(P. Nemenyi的英译本《几何与想象》。纽约：Chelsea，1956年。)

Hobbes, T.

霍布斯[1651] 《利维坦》，载于W.Molesworth所编《托马斯·霍布斯著作英文集》，第3卷，伦敦：John Bohn，1839年。

霍布斯[1656] 《关于自由、必然性与机遇的质疑》，载于W. Molesworth所编《托马斯·霍布斯著作英文集》，第5卷，伦敦：John Bohn，1841年。

Hölder, O.

荷德尔[1924] 《数学的方法》(德文)。柏林：Springer。

Hoppe, R.

霍珀[1879] "欧拉多面体命题补全"(德文)，《数学与物理学文存》，63，第100—103页。

Husserl, E.

胡塞尔[1900] 《逻辑研究》(德文)，第1卷，蒂宾根：Niemeyer，1968年。

Jonquiéres, E. de

德荣奎埃[1890a] "释多面体理论的一个基本点"(法文)，《科学院会议通报》，110，第110—115页。

德荣奎埃[1890b] "释多面体理论中的欧拉定理"(法文)，《科学院会议通报》，110，第169—173页。

Jordan,C.

约当[1866a] “多面体探讨”(法文),《纯粹数学与应用数学杂志》,66,第22—85页。

约当[1866b] “非欧拉多面体对称性探讨概述”(法文),《纯粹数学与应用数学杂志》,66,第86—91页。

约当[1881] “论富里叶级数”(法文),《科学院会议通报》,92,第228—233页。

约当[1887] 《理工学院分析教程》(法文),第3卷,第1版。巴黎:Gauthier-Villars。

约当[1893] 《理工学院分析教程》(法文),第1卷,第2版。巴黎:Gauthier-Villars。

Jourdain, P. E. B.

朱迪安[1912] “评富里叶对数学观的影响”(英文),《第五届国际数学会议文集》,2,第526—527页。

Kant, I.

康德[1781] 《纯粹理性批判》(德文)。第1版。

Kepler, I.

开普勒[1619] 《宇宙的和谐》(拉丁文),收入M. Caspar 和W. von Dyck所编《全集》,第6卷,慕尼黑:C. H. Beck,1940年。

Knopp, K.

克诺普[1928] 《无穷级数的理论和应用》。(R. C. Young的英译本,伦敦和格拉斯哥:Blackie,1928年。)

Lakatos, I.

拉卡托斯[1961] 《论数学发现的逻辑》(英文),未发表的博士论文,剑桥大学。

拉卡托斯[1962] “无穷回溯和数学基础”(英文),《亚里士多德学会增刊》,36,第155—184页。

拉卡托斯[1970] “否证与科学研究纲领方法论”(英文),载于I. Lakatos和A. E. Musgrave所编《批评与知识生长》,剑桥:Cambridge University Press,第91—196页。

Landau, E.

兰道[1930] ‹分析基础›(德文)。莱比锡：Akademische Verlagsgesellschaft。

Lebesgue, H.

勒贝格[1923] “谈谈伽米勒·约当的生平与工作”(法文)，‹法兰西研究院研究报告›，58，第34—66页。重印于勒贝格‹谈谈数学史›，日内瓦，第40—65页。

勒贝格[1928] ‹积分与原函数求法讲义›(法文)。巴黎：Gauthier-Villars。(由1905年原版扩充而成的第2版。)

Legendre, A. M.

勒让德[1809] ‹几何要义›(法文)。第八版。巴黎：Didot。初版发表于1794年。

Leibniz, G. W. F.

莱布尼茨[1687] “致Bayle的信”，收入C. I. Gerhardt所编‹哲学论著›，第3卷，希尔德斯海姆：George Olms (1965年)，第52页。

Lhuilier, S. A. J.

吕里埃[1786] ‹高等微积分原理浅讲›(法文)。柏林：G. J. Decker。

吕里埃[1812—1813a] “多面体学研究报告”(法文)，‹纯粹数学与应用数学纪事›，3，第168—191页。

吕里埃[1812-1813b] “正则立体研究报告”(法文)，‹纯粹数学与应用数学纪事›，3，第233—237页。

Listing, J. B.

李斯丁[1861] “空间复形详考”(德文)，‹格丁根市柯尼希科学会论文集›，10，第97—182页。

Loeve, M.

洛伊夫[1955] ‹概率论›(英文)。纽约：Van Nostrand。

Matthiessen, L.

马梯森[1863] “论欧拉多面体命题的表面限制”(德文)，‹数学与物理学杂志›，8，第449—450页。

Meister, A. L. F.

迈斯特尔[1771] “平面图形作法的概括及其所造成的各种影响›(拉丁

文)，《格丁根科学总会新评论》，1，第144—180页。

Menger, K.

曼格尔[1928] 《维的理论》(德文)。柏林：Teubner。

Möbius, A. F.

梅比乌斯[1827] 《重心计算法》(德文)。希尔德斯海姆：George Olms，1968年。

梅比乌斯[1865] "论多面体体积的决定"(德文)，《柯尼希-萨克森科学会通报：数学-物理学类》，17，第31—68页。

Moigno, F. N. M.

穆阿格诺[1840—1841] 《微分与积分讲义》(法文)，两卷。巴黎：Bachelier。

Moore, E. H.

摩尔[1902] "论数学基础"(英文)，《科学》，17，第401—416页。

Morgan, A. de

德摩根[1842] 《微分与积分》(英文)。伦敦：Baldwin and Gadock。

Munroe, M. E.

芒罗[1953] 《测度与积分引论》(英文)。马萨诸塞州剑桥：Cambridge University Press。

Neumann, J. von

冯·诺伊曼[1947] "数学家"(英文)，载于R. B. Heywood所编《心的创作》。芝加哥：Chicago University Press。

Newton, I.

牛顿[1717] 《光学》(英文)。第2版。伦敦：Dover，1952年。

Olivier, L.

奥利维尔[1826] "注记由移除而转为直线所围图形的复合体的图形"(德文)，《纯粹数学与应用数学杂志》，1，第227—231页。

Pascal, B.

帕斯卡[1659] 《几何学泛思(几何学的精神与劝诱者的艺术)》(法文)。收入J.Chevalier所编《全集》，巴黎：La Librairie Gallimard，1954年，第575—604页。

Peano, G.

皮阿诺[1894] 《数理逻辑的记号体系》(意大利文)。都灵：Guadagnini。

Pierpont, J.

皮尔庞特[1905] 《实变函数论》(英文)，第1卷。纽约：Dover，1959年。

Poincaré, H.

庞卡勒[1893] "欧拉多面体定理的概括"(法文)，《科学院会议通报》，117，第144页。

庞卡勒[1899] "位置分析补论"(法文)，《巴勒莫数学会报告》，13，第285—343页。

庞卡勒[1902] 《科学与假说》(法文)。巴黎：Flammarion。G.B. Halsted 的权威英译本：《科学的基础》，宾夕法尼亚州兰开斯特：The Science Press，1913年，第27—197页。

庞卡勒[1905] 《科学的价值》(法文)。巴黎：Flammarion。G. B. Halsted 的权威英译本：《科学的基础》，宾夕法尼亚州兰开斯特：The Science Press，1913年，第359—546页。

庞卡勒[1908] 《科学与方法》(法文)。巴黎：Flammarion。G. B. Halsted 的权威英译本：《科学的基础》，宾夕法尼亚州兰开斯特：The Science Press，1913年，第546—854页。

Poinsot, L.

庞索特[1810] "多边形与多面体研究报告"(法文)，《理工学院杂志》，4，第16—48页。1809年7月宣读。

庞索特[1858] "释多面体理论"，《科学院通报》，46，第65—79页。

Pólya, G.

坡亚[1945] 《怎样解题》(英文)。普林斯顿：Princeton University Press。

坡亚[1954] 《数学与似然推理》(英文)，第1，2卷。伦敦：Oxford University Press。

坡亚[1962a] 《数学发现》(英文)，1。纽约：Wiley。

坡亚[1962b] "数学教学与生物发生律"(英文)，载于I. J. Good所编《科学家的玄思》。伦敦：Heinemann，第352—356页。

Pólya, G. and Szegö, G.

坡亚和舍戈[1927] «分析习题与定理»(德文)，第1卷。柏林：Springer。

Popper, K. R.

波普尔[1934] «研究的逻辑»(德文)。维也纳：Springer。

波普尔[1935] “致编者的信”，«认识»，3，第426—429页。重印于波普尔[1959]附录*1中，第311—314页。

波普尔[1945] «开放社会及其敌人»(英文)。两卷，伦敦：Routledge and Kegan Paul。

波普尔[1947] “无假设的逻辑”(英文)，«亚里士多德学会会刊»，47，第251—292页。

波普尔[1952] “哲学问题的本性及其在科学中的根源”(英文)，«不列颠科学哲学杂志»，3，第124—156页。重印于波普尔[1963a]。

波普尔[1957] «历史主义的贫困»(英文)。伦敦：Routledge and Kegan Paul。

波普尔[1959] «科学发现的逻辑»。[1934]的英译本。伦敦：Hutchinson。

波普尔[1963a] «猜想与反驳»。伦敦：Routledge and Kegan Paul。

波普尔[1963b] “科学：问题、目标与责任”(英文)，«美国实验生物学会联合会：联合会刊»，22，第961—972页。

波普尔[1972] «客观知识»(英文)。Oxford University Press。

Pringsheim, A.

普林斯海姆[1916] “一般函数论基础”(德文)，载于M. Burkhardt, W. Wutinger和R. Fricke 所编«数理科学百科全书»，第2卷，第1册，第1分册，第1—53页。莱比锡：Teubner。

Quine, W. V. O.

蒯因[1951] «数理逻辑» (英文)。修订版。马萨诸塞州剑桥：Harvard University Press。

Ramsey, F. P.

阮姆赛[1931] «数学基础及其他论文»(英文)。R. B. Braithwaite编。伦敦：Kegan Paul。

Raschig, L.

拉什希[1891] “谈多面体学中的欧拉定理”，«什内堡中学校庆文集»，

Reichardt, H.

赖哈特[1941] “274题解”(德文)，«德国数学会年鉴»，51，第23页。

Reichenbach, H.

赖欣巴赫[1947] «符号逻辑要义»(英文)。纽约：Macmillan。

Reiff, R.

赖夫[1889] «无穷级数史»(德文)。蒂宾根：H. Laupp'schen。

Reinhardt, C.

赖因哈特[1885] “谈梅比乌斯多面体理论：献给von F. Klein 先生”(德文)，«莱比锡市柯尼希-萨克森科学会活动通报»，37，第106—125页。

Riemann, B.

黎曼[1851] «一般复变函数论基础»(德文)。即就职论文，载于M. Weber和R. Dedekind所编«数学著作与科学手稿全集»，第2版。莱比锡：Teubner，1892年，第3—48页。

黎曼[1868] “论函数用三角级数可表示性”(德文)，«格丁根市柯尼希科学会论文集»，13，第87—132页。

Robinson, R.

罗宾逊[1936] “希腊几何中的分析”(英文)，«心»，45，第464—473页。

罗宾逊[1953] «柏拉图早期辩证法»(英文)。牛津：Oxford University Press。

Rudin, W.

鲁丁[1953] «数学分析原理»(英文)。第1版。纽约：McGraw-Hill。

Russell, B.

罗素[1901] “近期数理哲学工作”(英文)，«国际月刊»，3。改名“数学与形而上学家”，重印于他的[1918]，第59—74页。

罗素[1903] «数学原理»(英文，英文书名)。伦敦：Allen and Unwin。

罗素[1918] «神秘主义与逻辑»(英文)。伦敦：Allen and Unwin。

罗素[1959] «我的哲学的发展»(英文)。伦敦：Allen and Unwin。

Russell, B. and Whitehead, A. N.

罗素和怀德海[1910—1913] «数学原理»(英文，拉丁文书名)。第1卷，1910年；第2卷，1912年；第3卷，1913年。Cambridge University

Press.

Saks, S.

萨克斯[1933] 《积分论》(法文)。L. C. Young 的英译本,第 2 版。纽约:Hafner, 1937年。

Schläfli, L.

施赖夫里[1852] "多重连续性理论"(德文)。死后发表于《全瑞士自然科学总会新备忘录》,38,第1—237页。苏黎世,1901年。

Schröder, E.

施罗德[1862] "论有分数边数的多边形,或星状多边形在几何学中的意义"(德文),《数学与物理学杂志》,7,第55—64页。

Seidel, P. L.

赛德尔[1847] "释表示不连续函数的级数的一种性质"(德文),《柯尼希-巴威利科学院数学-物理学类文集》,5,第381—393页。

Sextus Empiricus

塞克斯都·恩披里可[约190] 《反逻辑学家》。希腊原文,附有R. G.Bury的英译文。伦敦:Heinemann,1933年。

Sommerville, D. M. Y.

萨默维尔[1929] 《N 维几何引论》(英文)。伦敦:Dover, 1958年。

Steiner, J.

施坦纳[1826] "欧拉的一个立体几何命题的简易证明"(德文),《纯粹数学与应用数学杂志》,1,第364—367页。

Steinhaus, H.

施坦豪斯[1960] 《数学万花镜》(英文)。增订版。纽约:Oxford University Press.

Steinitz, E.

施坦尼茨[1914—1931] "多面体与空间划分"(德文),载于W. F. Meyer和H. Mohrmann所编《数理科学百科全书》,第 3 卷,AB. 12.莱比锡:Teubner。

Stokes, G.

斯托克斯[1848] "论周期级数之和的临界值"(英文),《剑桥哲学会会

报》,8,第533—583页。

Szabó, A.

萨博[1958] “‘Deiknymi’是指‘证明’的数学术语”(德文),《玛娅:新从刊》,10,第1—26页。

萨博[1960] “欧几里得公理系统的发端”(德文),《精密科学史文存》,1,第37—106页。

Szökefalvi-Nagy, B.

舍克伐尔威-纳吉[1954] 《实函数与函数分类》(匈牙利文)。布达佩斯:Tankönyvkiadó。

Tarski, A.

塔尔斯基[1930a] “论元数学的若干基本概念”(德文),《华沙科学与文学会会议通报》,23,第III类,第22—29页。英译文发表于伍杰(编)[1956],第30—37页。

塔尔斯基[1930b] “演绎科学方法论的基本概念:1”(德文),《数学与物理学月刊》,37,第361—404页。英译文发表于伍杰(编)[1956],第60—109页。

塔尔斯基[1935] “论逻辑后承概念”(英文)。发表于伍杰(编)[1956],第409—420页。这篇文章是1935年在巴黎宣读的。

塔尔斯基[1941] 《逻辑与演绎科学方法论导引》(英文)。第2版。纽约:Oxford University Press,1946年。(这是《论数理逻辑与演绎方法》的局部增改本,原书用波兰文发表于1936年,德译本发表于1937年。)

Turquette, A.

图开特[1950] “哥德尔与先验综合陈述”(英文),《哲学杂志》,47,第125—129页。

Waerden, B. L. van der

范德瓦尔登[1941] “拓扑学与黎曼曲面统一处理”(德文),《莱比锡市柯尼希-萨克森科学会活动通报》,93,第147—160页。

Whewell, W.

惠威尔[1858] 《科学思想史》(英文),第1卷。(《归纳科学的哲学》第3版第1部分。)

Wilder, R. L.

怀尔德[1944] “数学证明的本性”(英文)，«美国数学月刊»，52，第309—323页。

Woodger, J. M.

伍杰(编)[1956] «逻辑学，语义学，元数学»(英文)。牛津：Clarendon Press。

Young, W. H.

杨[1903—1904] “论级数的一致收敛与逐项积分”(英文)，«伦敦数学会会刊»，1，第2辑，第89—102页。

Zacharias, M.

查哈里阿斯[1914—1921] “初等几何”(德文)，载于W. F. Meyer 和H Mohrmann 所编«数理科学百科全书»，3，第1册，第2分册，第862—1176页。莱比锡：Teubner。

Zygmund, A.

齐格蒙特[1935] «三角级数»(英文)。纽约：Chelsea，1952年。

汉译人名对照表

（按译名音序排列）

A

阿贝尔 Abel, N. H.
阿诺德 Arnauld, A.
阿尔伯 Arber, A.
埃尔米特 Hermite, C.
埃修斯 Aetius
艾施外勒尔 Eschweiler, T. J.
爱因斯坦 Einstein, A.
安布罗斯 Ambrose, A.

B

巴采尔 Baltzer, R.
巴门尼德 Parmenides
巴特利 Bartley, W. W.
波普尔 Popper, K. R.
伯奈斯 Bernays, P.
柏拉图 Plato
贝尔 Bell, E. T.
贝哈德 Bérard, J. B.
贝克尔 Becker, J. C.
贝克莱 Berkeley, G.
毕达哥拉斯 Pythagoras
波尔查诺 Bolzano, B.
波莱 Bolyai, J.
博耶 Boyer, C.
布尔 Boole, G.
布尔巴基 Bourbaki, N.
布劳维 Brouwer, L. E. J.
布雷思韦特 Braithwaite, R. B.

C

蔡梅洛 Zermelo, E.

D

达尔布 Darboux, G.
当若依 Denjoy, A.
德卡瑞尔 de Careil, F.
德摩根 de Morgan, A.
德奥夫拉斯都 Theophrastus
德荣奎埃 de Jonquières, E.
狄厄多内 Dieudonné, J.
狄克 Dyck, W.
狄拉克 Dirac, P.

狄里希勒特　Dirichlet, P. L.

第欧根尼・拉尔修　Diogenes Laertius

笛卡儿　Descartes, R.

杜布瓦-瑞蒙　du Bois-Reymond, P. D. G.

F

范德瓦尔登　van der Waerden, B. L.

菲利克斯　Félix, L.

菲涅耳　Fresnel, A.

冯・诺伊曼　von Neumann, J.

冯施陶特　von Staudt, K. G. C.

弗雷格　Frege, G.

弗雷歇　Fréchet, M.

福德尔　Forder, H. G.

富里叶　Fourier, J.

G

干岑　Gentzen, G.

高斯　Gauss, C. F.

格拉坦-格林尼斯　Grattan-Guinness, I.

格龙奈特　Grunert, J. A.

戈德施米特　Goldschmidt, R.

哥德巴赫　Goldbach, C.

哥德尔　Gödel, K.

哥伦布　Columbus, C.

哥西　Cauchy, A. L.

H

哈代　Hardy, G. H.

哈莫斯　Halmos, P.

海丁　Heyting, A.

海斯　Heis, E.

汉克尔　Hankel, H.

汉施廷　Hansteen, C.

豪斯纳　Haussner, R.

荷德尔　Hölder, O.

赫克尔　Haeckel, E.

赫塞尔　Hessel, F.

霍尔斯特德　Halsted, G. B.

霍珀　Hoppe, R.

霍布斯　Hobbes, T.

黑格尔　Hegel, G. W. F.

洪伯威　Holmboë, B. M.

胡塞尔　Husserl, E.

怀尔德　Wilder, R. L.

怀特海　Whitehead, A. N.

惠威尔　Whewell, W.

J

伽利略　Galileo

伽莫夫　Gamow, G.

K

卡尔纳普　Carnap, R.

卡尔斯拉夫　Carslaw, H. S.

P

帕普斯	Pappus
帕斯卡	Pascal, B.
庞卡勒	Poincaré, H.
庞索特	Poinsot, L.
培根	Bacon, F.
皮阿诺	Peano, G.
皮尔庞特	Pierpont, J.
玻亚	Pólya, G.
普林斯海姆	Pringsheim, A.
普罗克洛斯	Proclus
普哇松	Poisson, S.-D.

Q

齐格蒙特	Zygmund, A.
丘奇	Church, A.

R

日果内	Gergonne, J. D.
鲁丁	Rudin, W.
阮姆赛	Ramsey, F. P.

S

萨博	Szabó, Á.
萨克斯	Saks, S.
萨默维尔	Sommerville, D. M. Y.
塞克斯都·恩披里可	Sextus Empiricus
赛德尔	Seidel, P. L.
舍戈	Szegö, G.
舍克伐尔威·纳吉	Szőkefalvi-Nagý, B.
施赖夫里	Schläfli, L.
施罗德	Schröder, E.
施坦纳	Steiner, J.
施坦尼茨	Steinitz, E.
施瓦茨, H. A.	Schwarz, H. A.
施瓦茨, J.	Schwartz, J.
斯坦豪斯	Steinhaus, H.
斯蒂杰斯	Stieltjes, T. J.
斯托克斯	Stokes, G.

T

塔尔斯基	Tarski, A.
图开特	Turquette, A.
图灵	Turing, A. M.

W

维萨留斯	Vesalius
魏尔斯特拉斯	Weierstrass, K.

X

希尔伯特	Hilbert, D.
希斯	Heath, T. L.
西洛夫	Sylow, L.

y

亚里士多德　Aristotle

亚历山大罗夫

Aleksandrov, A. D.

杨　Young, W. H

约当　Jordan, C.

伊夫斯　Eves, H.

Z

查哈里阿斯　Zacharias, M.

芝诺　Zeno

朱迪安

Jourdain, P. E. B.